

# LEÇONS DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES - LE SYMBOLISME

Jérôme Proulx

Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique, Université du Québec à Montréal

En tant que didacticien des mathématiques, je suis amené par mes travaux de recherche à être en classe et à travailler avec des élèves du primaire et du secondaire. Dans ces visites et travaux, les élèves m'offrent souvent ce que j'appelle des « perles mathématiques », à travers divers raisonnements, erreurs, questions, stratégies et solutions. C'est à partir de ces productions mathématiques que je propose de tirer des réflexions, voire quelques leçons, autant mathématiques que didactiques, dans le but de comprendre ce que les élèves parfois nous enseignent par leur activité mathématique...

## LE SYMBOLISME

L'écriture en mathématiques est un enjeu important. Notre système d'écriture indo-arabe avec ses dix symboles, ses chiffres, porte avec lui certaines complexités, mais aussi certaines forces pour représenter et donner un sens aux nombres (voir en ce sens le nouvel ouvrage de Paul Lockhart, 2017, intitulé très justement *Arithmétique*). C'est pour ces raisons que l'apprentissage du système d'écriture chiffrée est important et que les enfants y sont initiés dès les premières années du primaire, voire en maternelle. Lors de cet enseignement, on permet aux élèves de jouer avec les symboles, de les écrire à leur façon, en les aidant à voir leur représentation, etc. On est parfois flexible sur l'utilisation faite par les jeunes enfants, où par exemple la quantité « treize » peut être représentée par « 13 », mais aussi par « 31 ». On préfère l'ordre usuel de « 13 », mais l'écriture inversée est tolérée, car l'élève est en apprentissage, ou plutôt en exploration de ces chiffres qui composent l'écriture des nombres : l'élève qui écrit « 31 » sait très bien qu'il ne parle pas de « trente-et-un » stylos mais bien de « treize » ou encore que le numéro qui lui a été assigné en classe, une pratique courante au Québec, est le « treize » et non le « trente-et-un » car de toutes façons il n'y a que « dix-huit » enfants dans sa classe de maternelle !

Ce système d'écriture est aussi un outil important pour la communication du travail mathématique. L'écriture chiffrée des nombres permet d'exprimer à d'autres (et aussi à soi-même) ce qu'on a fait et comment on y est arrivé. C'est à ce moment qu'une vigilance plus marquée sera portée envers l'écriture, son ordre, ses représentations, etc., avec l'intention de s'assurer que le message est bien compris et bien communiqué, autant pour l'autre que pour soi, particulièrement si un retour y est fait dans quelques semaines (ou encore plus tard pour l'enseignant qui corrigera notre copie d'examen...). Mais il y a plus, beaucoup plus, dans le système d'écriture des nombres que la communication. Je m'attarde ici sur la puissance du symbolisme mathématique.

Projetons-nous en classe Québécoise du 1<sup>er</sup> cycle du primaire (enfants de 7-8 ans), où l'enseignant demande oralement aux élèves s'il est possible de faire des paquets de 4 avec « vingt-quatre » jetons. Alors qu'ils sont tous au travail, le petit Marco me tire sur la chemise et me dit qu'il connaît plusieurs nombres qui permettent de faire des paquets de 4 et commence à me les énumérer en disant : « quatre, huit, douze, seize... vingt, vingt-quatre... vingt-huit... ». Je lui dis alors, voyant bien que la tâche pour lui pouvait être amenée plus loin, de prendre un bout du tableau dans le coin de la classe et d'écrire ses nombres pour qu'ensuite on regarde en groupe ce qu'il a trouvé. Une dizaine de minutes plus tard, je me retourne et vois Marco devant plusieurs nombres, écrits par bonds de 4, allant de quatre à ... 29 ; en fait jusqu'à « quatre-vingt-douze », écrit en inversant les chiffres ! Mais, qu'importe, il est évident que Marco veut dire « quatre-vingt-douze » et aucun élève n'en fera de cas, car pour eux l'ordre n'occupe pas encore une place centrale dans l'écriture. Voici en fait la liste produite par Marco :

4	8	12	16		
20	42	28	32	63	
40	44	48	25	65	62
68	27	76	80		
48	88	29			

Mis à part une erreur à 62 au lieu de 60 (qui « s'autocorrige » avec 68, si on le veut bien, en oubliant un bond entre les deux nombres), on voit la robustesse des bonds pensés par Marco en étant flexible sur l'ordre des chiffres dans l'écriture du nombre. Cette flexibilité dans l'écriture, où l'élève est davantage centré sur le nombre lui-même et non sur sa traduction en écriture chiffrée, peut être conçue comme une force chez cet élève. En effet, on se réjouit de l'accent mis sur le nombre, sur les bonds et transformations d'un nombre à l'autre, plus que sur l'écriture des nombres.

On s'en réjouit...oui et non, comme la suite nous le dira.

L'enseignant regroupe alors les élèves autour du tableau du coin de classe pour que Marco explique aux autres son raisonnement et ce qu'il a trouvé. Marco démarre en expliquant à tous qu'il a développé une suite de nombres par bonds de 4, les nommant oralement tout en les pointant dans sa liste : 4, 8, 12, 16... tous les élèves suivent et plusieurs peuvent même anticiper le prochain bond. ... 20, 42, 28, 32, 63, 40, 44... (dits tels que « vingt », « vingt-quatre », « vingt-huit », « trente-six », etc.). Aucun élève ne bronche face à l'écriture inversée de Marco, même si le tableau utilisé est adjacent à une grille traditionnelle de nombre de 1 à 100 avec tous les nombres écrits dans l'ordre usuel.

Toutefois, Marco s'arrête, intrigué par ses propres affirmations, et tente de verbaliser qu'une certaine répétition se produit dans les nombres qu'il nomme (en effet, « quatre/huit/douze/seize/vingt/vingt-quatre/vingt-huit/etc. »). Pour tenter de la comprendre, il nous pointe ses nombres écrits, mais n'y voit rien et recule du tableau, un peu surpris... Certains nombres se répètent, comme des 2, des 4 et des 8, mais on ne peut pas y voir plus que leur répétition, un peu aléatoire...

La cloche sonne et Marco reste un peu bouche bée. Alors que les autres élèves partent pour le repas, je reprends certaines idées avec Marco sur l'écriture. Mais Marco est déjà ailleurs, à penser à ses copains et avec qui il sera assis pour manger, plus qu'à écouter le « monsieur de l'université » qui lui parle de nombres et de leur écriture. Une attitude assez saine, on l'avouera !

Que penser de tout ceci ? D'abord, on ne peut qu'applaudir les idées de Marco et son aisance à trouver des bonds de 4, mais aussi celle des autres élèves qui arrivent très bien à suivre ses explications, et ce, malgré l'écriture inversée. Cette inversion est toutefois un détail pour ces élèves qui, dès qu'on leur demande, écrivent les nombres « comme on le veut » sans broncher, mais aussi sans vraiment y voir un intérêt car « vous avez compris Monsieur ce que je voulais dire ». Et ils ont raison, sur le plan de la communication de leur travail mathématique.

Sur le plan des mathématiques et du symbolisme, c'est une autre histoire par contre. En effet, leur flexibilité leur joue des tours ici, alors qu'ils ne sont pas capables d'utiliser le symbolisme en leur faveur : leur symbolisme ne sert qu'à représenter les nombres, il n'est pas créateur de sens nouveau. Toutefois, c'est aussi une force du symbolisme de faire voir plus, de produire de nouvelles idées et compréhensions. La représentation symbolisée des concepts mathématiques et les concepts eux-mêmes vont de pair et évoluent ensemble, en s'influençant l'un et l'autre, tel que l'expliquent Byers et Erlwanger (1984) à travers l'histoire des mathématiques ou encore Bednarz *et al.* (1993) par leurs expérimentations dans les classes du primaire autour du nombre. On se sert du symbolisme pour représenter les nombres ou les idées mathématiques, mais en retour ces symbolisations sont porteuses de nouvelles compréhensions importantes : on y voit des nouvelles idées, ou des nouvelles possibilités, qui vont

exiger un nouveau symbolisme. Et ceci se prête à toute forme de symbolisme, de l'algèbre au calcul différentiel en passant par les nombres et les représentations géométriques ; le symbolisme et le sens des concepts vont de pair et évoluent l'un et l'autre en symbiose.

Malgré sa force, la suite des nombres écrits par Marco est ici problématique, car elle empêche le développement d'une compréhension supplémentaire sur les nombres de sa suite. Comme le montrent les deux tableaux suivants, l'écriture utilisée ne permet effectivement pas de voir la répétition des 4, 8 et des 2, 6, 0 sur un groupement de 20.

4	8	12	16		
20	42	28	32	63	
40	44	48	25	65	62
68	27	76	80		
48	88	29			

La suite initiale de Marco

4	8	12	16		
20	24	28	32	36	
40	44	48	52	56	62
68	72	76	80		
84	88	92			

La suite représentée avec les nombres écrits dans l'ordre usuel, avec les régularités associées en noir et en rouge et les groupements de 20 placés en couleur

L'écriture de Marco ne permet pas de voir la régularité, qui existe au niveau de l'écriture des nombres. En fait, cette régularité existe aussi au niveau des mots, car Marco réalise une répétition dans la façon avec laquelle il nomme les nombres qu'il a écrit : le quatre, le huit, le deux, etc., semblent revenir constamment dans sa suite nommée oralement, mais il ne la perçoit pas au niveau symbolique. Et, comme il ne maîtrise pas encore tout à fait l'écriture en lettres des nombres, il ne peut s'y rabattre. Sa façon d'écrire ses nombres avec des chiffres est la seule option qui s'offre à lui.

Ainsi, Marco en demeure à la suite des bonds de 4, mais il ne peut pas aller plus loin, voire en perd intérêt, car aucune régularité n'en ressort. L'écriture inversée lui a donc joué un tour en l'empêchant d'aller plus loin et d'y voir plus.

La leçon à tirer de tout ceci n'est évidemment pas de soudainement devenir rigide et d'empêcher l'exploration flexible de l'écriture symbolique des nombres par les élèves. Bien au contraire. C'est justement à travers cette exploration que l'intérêt initial de communiquer peut être dépassé, pour montrer ce qu'on peut gagner au niveau mathématique en symbolisant de certaines façons. Et c'est grâce à ces événements, où tout le potentiel mathématique du symbolisme n'est pas exploité, qu'une intervention devient pertinente : on voit directement l'effet de l'écriture inversée au niveau mathématique. Au niveau communicationnel, les enfants ne voient pas l'avantage : tout le monde comprend ce qui veut être communiqué, même les grands, alors mission accomplie. Au niveau mathématique, par contre, une occasion est à saisir pour dépasser la simple représentation numérique et explorer d'autres avenues que le symbolisme nous permet de voir, ici, littéralement !

Quelle belle leçon ! Merci Marco.

## RÉFÉRENCES

- Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L. & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint of the use of symbolism in mathematics education. *The Alberta Journal of Educational Research*, 39(1), 41-58.
- Byers, V. & Erlwanger, S. (1984). Content and form in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 259-257.
- Lockhart, P. (2017). *Arithmetic*. Cambridge, MA: Belknap Press.