

# RAPPORT PERSONNEL A L'OBJET HASARD DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE AU BENIN

Henri Dandjinou, Alain Bronner

IMSP, Université d'Abomey-Calavi, Bénin

Université de Montpellier et Laboratoire LIRDEF, France

## INTRODUCTION

Dans le système scolaire béninois, les probabilités s'enseignent pour la première fois dans les classes terminales (17-18 ans). Les programmes en vigueur recommandent l'étude du « vocabulaire des probabilités », terme regroupant des notions élémentaires des probabilités, dont celle d'expérience aléatoire. Cette dernière dépend de la notion controversée de hasard qui n'est abordée nulle part dans les programmes de mathématiques. En général, le hasard intervenant dans le calcul des probabilités au secondaire est le hasard « bénin », celui obéissant aux théorèmes limites (Lahanier-Reuter, 1999). Plus spécifiquement, le hasard bénin le plus fréquent dans le calcul des probabilités est celui du « tirage au sort » qui intervient dans les jeux de hasard. Dans le but d'appréhender les difficultés rencontrées par les élèves en probabilités, nous nous intéressons dans notre étude à l'apprentissage de la notion de hasard. Il s'agit pour nous d'évaluer le rapport personnel des élèves à la notion de hasard à l'issue d'un enseignement des probabilités. Dans ce travail, nous présentons dans un premier temps l'étude de l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire, avant d'étudier dans un second temps le rapport à la notion de hasard chez les élèves ayant fraîchement suivi des cours de probabilités.

## PROBLÉMATIQUE

L'évolution non linéaire de la notion de hasard à travers l'histoire depuis Aristote jusqu'à Laplace montre que des rapport au hasard constituent un obstacle épistémologique au calcul des probabilités (Girard, 2001b), comme le précisent Chrétien et Gaud (1998, p. 82) : « La notion de hasard fournit un exemple remarquable de l'obstacle épistémologique selon Bachelard ». En effet, par rapport à la notion de hasard, Chrétien et Gaud relèvent à travers des exemples de phénomènes aléatoires donnés par les élèves, plusieurs types de rapports personnels qui remettent en cause par exemple le principe de causalité (Chrétien & Gaud, 1998). De même, des expériences réalisées par Girard (2001b) ont montré que les étudiants ont des rapports différents au hasard, faisant de ce dernier un concept difficile à définir. Parlant d'obstacles, Brousseau (1998) les définit comme des connaissances récurrentes qui résistent à l'établissement d'une connaissance meilleure et les répartit en obstacles de différentes origines (épistémologique, ontogénique, sociale et culturelle). Dans ce sens, il existe des obstacles à la notion de hasard, et qui pourraient être des causes des difficultés rencontrées par les élèves dans l'étude des probabilités. D'abord, Piaget et Inhelder (1951) ont montré que l'enfant du stade de développement préopératoire a tendance à considérer que l'éventualité la moins fréquente, ou à l'inverse celle qui est plus fréquente a plus de chance d'être réalisée. Ils ont désigné par le terme « compensation » le premier de ces deux rapports. Ce qui signifie que la pensée de l'enfant jusqu'à un certain âge est un obstacle d'ordre ontogénique à la notion de hasard. Dans le même registre, Lévi-Bruhl (1960) note l'absence du hasard dû à la fatalité dans les sociétés qu'il a qualifiées de mentalité primitive, dont les caractéristiques sont perceptibles dans les pays de l'Afrique subsaharienne, faisant de cette mentalité primitive un obstacle culturel à la notion de hasard.

Depuis l'introduction des probabilités dans les programmes béninois, dans les années 60-70, la notion d'expérience aléatoire est enseignée en considérant que la notion de hasard est un acquis pour les élèves, ce qui pourrait constituer un obstacle didactique au calcul des probabilités. C'est pour cela qu'il nous semble important d'étudier le rapport des élèves béninois au hasard. Pour ce faire, nous

nous posons la question de savoir si les conditions actuelles de l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire au Bénin permettent d'espérer chez les élèves un rapport personnel conforme au hasard du « tirage au sort ». Nous conjecturons que la manière très rapide dont la plupart des enseignants évacuent cet enseignement ne garantit pas la déstabilisation des obstacles énumérés ci-dessus.

## CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE

### Cadre théorique

Pour étudier les connaissances des élèves, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) de Chevallard (1992), à travers la notion de rapport personnel  $R_X(O)$  du sujet élève X à un objet d'enseignement O, qu'il définit comme la connaissance et toutes les relations que le sujet X a de l'objet O. Nous articulons ce cadre avec la théorie de Brousseau (1998) relative à la notion d'obstacle, déjà présentée plus haut. Dans les programmes béninois, l'objet hasard a pour habitat la notion d'expérience aléatoire, dont l'enseignement donne l'occasion implicite d'une première rencontre. Par ailleurs, notre étude étant réalisée juste après que les élèves ont étudié les probabilités en classe, nous sommes amenés à étudier la transposition didactique (Chevallard, 1991) de la notion d'expérience aléatoire.

Enfin, nous ajoutons à ces cadres les travaux de Piaget (1951) et de Lévy-Bruhl (1960) d'une part qui font de certains rapports au hasard des obstacles ontogénique et culturel, et d'autre part de ceux de Maury (1985) que nous avons exploités dans nos analyses.

### Méthodologie de recherche

Notre méthodologie repose sur l'analyse des réponses des élèves à un test, en vue d'identifier des erreurs régulières relatives à la notion de hasard. Avant cela, il a fallu analyser la manière dont cette notion est enseignée. Plus précisément, nous avons :

- réalisé au cours de l'année scolaire 2012-2013 des enregistrements audio des séances de cours de probabilités dans quatre classes terminales, constituant un ensemble de 116 élèves, tenues par deux professeurs certifiés de mathématiques ;
- récupéré les notes de cours des élèves et la fiche pédagogique d'un des deux professeurs ;
- administré aux élèves des quatre classes citées ci-dessus un test portant sur le calcul des probabilités, comportant sept exercices et dont l'un vise l'étude de l'apprentissage de la notion de hasard ;
- réalisé en 2014 auprès de quatre-vingts enseignants ayant dispensé des cours de probabilités une enquête portant entre autres sur l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire.

Les enregistrements audio, les notes de cours des élèves, la fiche pédagogique ainsi que les réponses des enseignants au questionnaire ont servi à étudier l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire, tandis que les réponses des élèves au test ont permis d'identifier les traits significatifs des rapports personnels au hasard. Il est à noter que 100 élèves parmi les 116 ayant suivi les cours enregistrés ont accepté volontairement de participer au test.

## ENSEIGNEMENT DE LA NOTION D'EXPÉRIENCE ALÉATOIRE AU BÉNIN

Deux modèles de textes de savoir relatifs à la définition de la notion d'expérience aléatoire existent au niveau de l'enseignement mathématique universitaire et des travaux de recherche en didactique des mathématiques. La définition la plus fréquente, au niveau universitaire, est celle qui la caractérise uniquement par le hasard comme dans la définition suivante proposée par Girard (2001a, p. 141) : « une épreuve aléatoire est donc simplement une expérience dont on ne peut ni prévoir, ni calculer le résultat ». Nous la

nommons « modèle universitaire » (MU). Le deuxième modèle que nous nommons « modèle didactique » (MD) est caractérisé à la fois par le hasard et par la connaissance préalable des résultats. Selon ce modèle, une expérience aléatoire est une expérience où le hasard intervient et dont on peut connaître les résultats possibles (Henry, 2001). Les modèles MU et MD ont en commun l'imprévisibilité du résultat mais diffèrent par la connaissance des issues possibles.

Au Bénin, on ne retrouve aucune trace d'une définition quelconque de la notion d'expérience aléatoire dans les instructions officielles de l'enseignement secondaire. Toutefois les deux modèles présentés ci-dessus se retrouvent séparément dans l'apprêt didactique constitué des manuels de mathématiques des classes terminales.

Au niveau de l'enseignement, face au manque d'indications des instructions officielles sur le modèle de définition à enseigner, l'un des deux enseignants dont nous avons enregistré des séances de cours a enseigné le modèle MD, tandis que le second a enseigné le modèle MU. Cette tendance reste confirmée par les réponses des enseignants au questionnaire, selon lesquelles certains enseignants choisissent d'enseigner le modèle MU et d'autres le modèle MD.

Globalement, dans la définition de la notion d'expérience aléatoire, il n'y a pas d'écart entre le savoir savant et le savoir à enseigner, ni entre ce dernier et le savoir enseigné, puisqu'on retrouve les deux modèles à tous les niveaux de savoir. Par ailleurs, il importe de souligner que dans l'enseignement des probabilités, le hasard n'est pas la préoccupation, ni des institutions d'enseignement, ni de la pratique enseignante.

## LES TYPES DE RAPPORTS À LA NOTION DE HASARD CHEZ LES ÉLÈVES

Nous proposons dans cette section d'étudier le rapport des élèves à la notion de hasard en analysant leurs réponses à l'exercice du test qui vise cette notion.

### Analyse a priori de l'exercice du test

#### PRÉSENTATION DE L'EXERCICE

L'exercice qui a servi à recueillir le rapport personnel des élèves à la notion de hasard porte sur le lancer de dé et s'énonce comme il suit.

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants : 2 – 5 – 3 – 4 – 1 – 1 – 6 – 5 – 2 – 3 – 6. Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

#### ANALYSE A PRIORI ET GRILLE D'ANALYSE

Une situation semblable à l'exercice précédent a été utilisée par Maury (1985) pour étudier la notion d'indépendance d'expériences aléatoires chez des élèves de quatrième (13 à 14 ans) avant tout enseignement des probabilités. Il était alors question que les élèves prédisent le résultat du quatrième lancer d'une pièce de monnaie, sachant que les résultats des trois premiers lancers sont dans l'ordre face, pile, pile. Nous la reprenons ici avec des lancers de dé chez des élèves de terminale, qui ont déjà reçu un enseignement en probabilités. L'équirépartition des résultats, sous-entendue dans l'exercice, vient du fait que la question d'un dé non équilibré n'est jamais posée, et par effet de contrat didactique, cette question ne se pose pas davantage pour les élèves.

La prise en compte des résultats obtenus par Maury (1985.), de ceux de Piaget (1951) et de Lévy-Bruhl (1960) nous permet d'envisager trois types de réponses que nous nommons ici respectivement « tirage au sort », « compensation » et « fatalité ». La classe « tirage au sort » est caractérisée par la réponse qui consiste à dire que le résultat d'un douzième lancer peut être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, en argumentant que le résultat est aléatoire. Le rapport « compensation » est celui que nous avons expliqué plus haut et qui est évoqué par Piaget et Inhelder (1951) chez les enfants du stade de développement préopérateur. L'élève de cette classe va affirmer que le résultat du douzième lancer

serait 4, le seul numéro qui n'est pas répété dans la suite des résultats des onze premiers lancers. Le type de réponses « fatalité » est celui comportant les réponses dans lesquelles le résultat est lié à une croyance qui ne reconnaît pas la nature aléatoire de la situation. C'est le type de rapports relevé par Lévy-Bruhl (1960) au niveau de la mentalité primitive. L'élève de cette classe indiquera simplement que le résultat du douzième lancer dépend du pouvoir surnaturel de celui qui a lancé le dé.

Les trois classes de réponses présentées ci-dessus constituent une première grille pour l'analyse a priori des réponses des élèves à l'exercice du test.

### Analyse des résultats

Il nous a été possible de regrouper les réponses des élèves en quatre catégories. Deux sont en lien avec l'analyse a priori, nommées « tirage au sort » et « compensation ». Mais il nous a fallu ajouter deux autres catégories, que nous avons nommées « constance » et « rapport non identifié ». Il nous semble que les réponses proposées par les élèves ne dépendent pas des textes de savoir MU et MD de la définition de l'expérience aléatoire enseignée.

#### LA CATÉGORIE « TIRAGE AU SORT »

Le hasard du « tirage au sort » est celui dont il est question dans l'enseignement des probabilités dans les collèges et lycées (Lahanier-Reuter, 1999). C'est l'appréhension du hasard qui permet de comprendre qu'on ne peut pas prévoir le résultat du douzième lancer. Un bon nombre d'élèves ont montré un rapport personnel conforme au hasard du « tirage au sort », comme le prouvent les réponses ci-après.

- Soit A le résultat qu'on obtiendrait au douzième lancer.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , car c'est une expérience aléatoire.
- 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6.
- On ne peut pas donner le résultat avec certitude, car c'est une expérience dont on ne peut pas connaître le résultat à l'avance. D'où c'est une expérience aléatoire.

#### LA CATÉGORIE « COMPENSATION »

Dans la catégorie « compensation », nous classons les élèves ayant soutenu que le résultat du lancer est 4, avec à des mots près l'argument consistant à remarquer que parmi les onze autres lancers, on a deux fois chaque numéro que comporte le dé sauf le numéro 4 qui est apparu une seule fois. Le type de rapports « compensation », qui s'observe ici chez des élèves qui sont tous du stade opératoire formel, relève d'un obstacle ontogénique, qui serait dû au fait que la notion de hasard n'a pas été l'objet d'une étude avec les élèves. Ce qui conforte la position de Fischbein et al. (1969, p.16) selon laquelle :

« L'évolution mentale ne prépare, en réalité, qu'une série de potentialités. Leur mise en valeur effective ne peut se réaliser que par un exercice systématique, de longue durée, au cours de ces stades de l'évolution intellectuelle. »

Autrement dit, il ne suffit pas d'être du stade opératoire formel pour avoir un rapport personnel conforme à l'objet hasard.

#### LA CATÉGORIE « CONSTANCE »

La catégorie que nous nommons « constance » est composée d'élèves provenant de deux classes, où il a été essayé l'enseignement de la probabilité à partir de l'approche fréquentiste. Dans cet essai, fait à partir de lancers de dé, la probabilité d'un événement avait été présentée comme la valeur autour de laquelle la fréquence de l'événement oscille suite à un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire. C'est ce qui aurait peut-être conduit les élèves de ce groupe à proposer le dernier numéro de

la suite des résultats des onze premiers lancers qui est en même temps le plus grand numéro du dé, comme dans les réponses suivantes :

- « On obtiendrait 6, car lorsqu'on va lancer le dé une douzième fois, le nombre 6 restera constant » ;
- « On obtiendrait le même résultat, parce que même si on lance une douzième fois, le résultat va se présenter comme une limite ».

En tant qu'effet d'un enseignement, le type de rapports « constance » constitue un obstacle didactique relevant de la responsabilité de l'enseignant.

LA CATÉGORIE « RAPPORT NON IDENTIFIÉ »

Certains élèves nous ont donné des réponses que nous n'avons pas pu situer par rapport à une régularité constatée. Ces élèves donnent l'impression de ne pas comprendre ce dont il est réellement question. Les exemples suivants sont quelques-unes des réponses de ce groupe :

- « On obtient le double des résultats lorsqu'on lance onze fois » ;
- « Le résultat qu'on obtiendrait si on lançait le dé une douzième fois est  $C_{12}^6$  ».

Nous regroupons ces élèves dans la catégorie « rapport non identifié », que nous complétons par d'autres élèves qui ont répondu à la question par la mention « aucune idée ». Certains n'avaient certainement pas compris ce qu'est une expérience aléatoire.

La répartition quantitative des groupes d'élèves ci-dessus présentées se résume par le graphique ci-après.

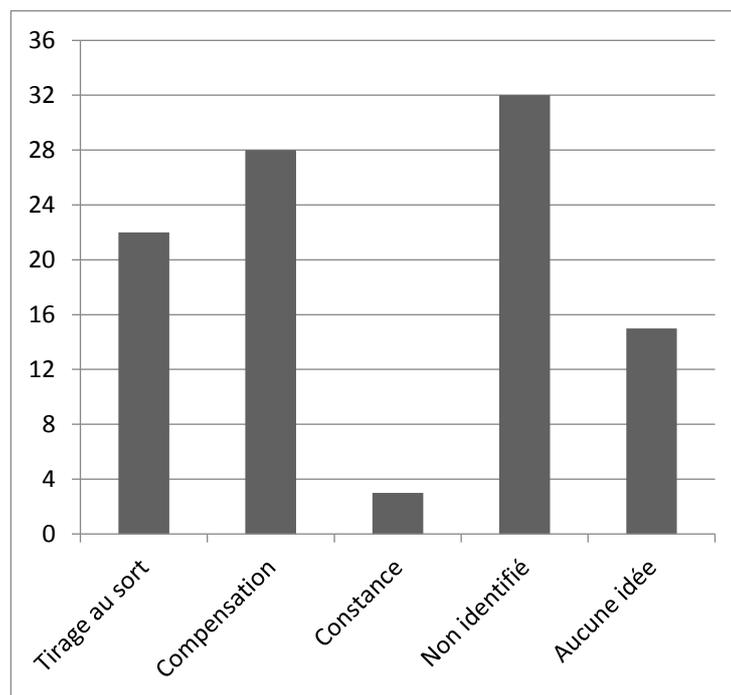


Fig 1 : Répartition quantitative des groupes d'élèves

On constate que moins du quart des élèves ont un rapport adéquat au hasard du tirage au sort.

## CONCLUSION

Il ressort de notre étude que l'enseignement des probabilités au secondaire n'assure pas à la majorité des élèves béninois un rapport personnel adéquat à la notion de hasard, car un nombre important d'élèves qui ont suivi un enseignement sur le calcul des probabilités n'a pas un rapport conforme au hasard du tirage au sort. Ceci ne devrait pas surprendre, puisque la notion de hasard n'est pas explicitement enseignée. Sur le plan qualitatif, nos résultats rejoignent globalement ceux de Maury (1985), notamment par rapport aux catégories « tirage au sort » et « compensation ». Cependant nous notons dans notre travail l'absence du raisonnement selon lequel le résultat du douzième lancer dépendrait de la manière dont le dé est lancé.

D'abord l'obstacle le plus remarquable, qui persiste chez les élèves, est l'obstacle ontogénique, que l'enseignement des probabilités dans les conditions actuelles n'a pas pu déstabiliser. À cet obstacle peut s'ajouter un obstacle d'ordre didactique issu d'une tentative d'enseignement de la notion de probabilité basée sur l'approche fréquentiste qui n'a pas permis de produire des résultats satisfaisants. Par contre, aucun des types de rapports personnels au hasard identifiés ne semble relever de l'obstacle lié à la mentalité primitive. Nous conjecturons que cet obstacle aurait dû être déstabilisé par l'enseignement.

En somme, il est nécessaire que les enseignants soient conscients des obstacles à la notion de hasard qu'ils doivent essayer de faire surmonter dans leur enseignement. Dans ce sens, il serait souhaitable qu'il y ait une évolution des programmes au Bénin pour une prise en compte de l'étude de la notion de hasard dans le cadre de l'enseignement des probabilités.

## BIBLIOGRAPHIE

- Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques* (pp. 115-160). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une anthropologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chrétien, C. & Gaud, D. (1998). Qu'est-ce que le hasard ? Comment le mathématiser ? *Repères-IREM*, 32, 81-110.
- Fischbein, E., Pampu, I. & Minzat, I. (1969). Initiation aux probabilités à l'école élémentaire. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 16-31.
- Girard, J-C. (2001a). Qu'est qu'une expérience aléatoire ? *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 141-144). Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté.
- Girard, J-C. (2001b). Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 189-200). Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté.
- Henry, M. (2001). Notion d'expérience aléatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste. *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 161-171). Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté.
- Lahanier-Reuter, D. (1999). *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*. 1<sup>ère</sup> édition. Presses Universitaires de France.
- Lévy-Bruhl, L. (1960). *La mentalité primitive*. 15<sup>e</sup> édition. Presses Universitaires de France.

- Maury, S. (1985). Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance. *Educational Study in Mathematics*, 16, 283-301.
- Piaget, J. & Bärbel, I. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. 2<sup>e</sup> édition. Presses universitaires de France.