

APPROCHE DE LA PROPORTIONNALITÉ A L'ÉCOLE PRIMAIRE : COMPARAISON DES SECTIONS FRANCOPHONE ET ALÉMANIQUE

Yves Schubnel, Chrystel Schwab-Freiburghaus

Haute École Pédagogique du canton de Fribourg - Unité de recherche EADS

Mots-clés : proportionnalité, propriétés de linéarité, plans d'études, moyens d'enseignement

Résumé : La proportionnalité est une notion qui est introduite à l'école primaire et son étude se poursuit au cours du secondaire 1. Cet article se réfère aux plans d'études en vigueur à l'école primaire en Suisse romande et en Suisse alémanique et les compare quant à l'approche de cette notion, avec un focus particulier sur les propriétés de linéarité. Nous comparerons également leur mise en œuvre dans les moyens d'enseignement des différents degrés du cycle 2 de l'école primaire des deux régions linguistiques.

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'unité de recherche Enseignement et apprentissage des sciences (EADS) de la Haute École pédagogique de Fribourg, nous avons choisi de conduire une réflexion sur l'approche de la proportionnalité, car il s'agit d'une notion dont l'acquisition par de jeunes élèves n'est pas toujours évidente. En effet, comme l'écrit Gille (2008, p. 11) à propos des élèves entrant en seconde – qui est le premier degré du secondaire 2 en France –, « force est de constater que la notion même de proportionnalité n'est pas réellement installée dans l'esprit de la plupart », et ce malgré sa présence constante dans les programmes scolaires (Simard, 2012b) et la résolution de problèmes variés comprenant en particulier les questions d'échelle au secondaire 1 (Weiss, 2012). Nous nous sommes donc intéressé·e·s à la manière dont la proportionnalité est abordée dans les classes du cycle 2 de l'école primaire. De plus, à l'heure où l'enseignement bilingue se développe en Suisse, il nous a semblé opportun et utile d'étudier les directives institutionnelles et les recommandations pour l'école en Suisse romande et en Suisse alémanique, en analysant et en comparant les contextes se rapportant à cette notion dans les plans d'études et les moyens d'enseignement des deux régions linguistiques.

À titre de prolongement, une séquence d'enseignement sur la thématique de la proportionnalité et des propriétés de linéarité a été conçue et mise en œuvre dans une classe francophone de 6H et une autre séquence portant sur la même thématique l'a été dans une classe germanophone de même degré. Il est prévu que cette expérimentation fasse l'objet d'une prochaine publication.

CADRE THÉORIQUE : LA PROPORTIONNALITÉ

Point de vue mathématique

Nous choisissons de définir une situation de proportionnalité à partir de deux suites numériques finies ayant le même nombre de termes. Deux suites de nombres réels sont dites proportionnelles si on peut passer de chaque terme de la première suite au terme correspondant de la seconde par un même opérateur multiplicatif appelé coefficient de proportionnalité.

Dans ces conditions, on voit qu'il existe une fonction linéaire qui relie les termes de la première suite à ceux de la seconde, à savoir la fonction f définie par $f(x) = a x$, dans laquelle a désigne le coefficient de proportionnalité. Réciproquement, la donnée d'une fonction linéaire permet la construction de deux suites proportionnelles.

Nous disposons ainsi de deux manières équivalentes de définir deux suites proportionnelles.

On montre facilement que toute fonction linéaire vérifie la propriété additive de linéarité : « pour tous nombres réels x et y , $f(x + y) = f(x) + f(y)$ » et la propriété multiplicative de linéarité : « pour tous nombres réels a et x , $f(a x) = a f(x)$ ».

Il est intéressant de noter que si f est continue, chacune des deux propriétés de linéarité est une propriété caractéristique des fonctions linéaires (Simard, 2012a).

La proportionnalité à l'école primaire

L'enseignement de la proportionnalité concerne le domaine multiplicatif. Il s'inscrit sur le long terme, débute au cycle 2 et est approfondi au cycle 3. D'après Charnay et Mante (2014, p. 293), les compétences à développer concernent principalement la résolution de problèmes, avec deux objectifs :

1. Reconnaître si une situation peut être mathématisée au moyen de la proportionnalité,
2. Mettre en œuvre un mode de résolution adapté, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des données en jeu.

Nous nous intéressons ici plus particulièrement au second objectif.

Une situation de proportionnalité peut être représentée par deux suites finies de nombres notés sur deux lignes ou deux colonnes d'un tableau, les nombres désignant en général des mesures de grandeurs ; les nombres d'une ligne (ou d'une colonne) sont obtenus à partir des nombres de l'autre ligne (ou de l'autre colonne) par multiplication par un même nombre. Les problèmes que nous considérons ici relèvent du calcul d'une quatrième proportionnelle.

Exemple : 2 petits pains coûtent 5 fr. Combien coûtent 14 petits pains ?

Nombre de petits pains	2	14
Prix en fr.	5	?

Nous avons affaire à une situation de proportionnalité, puisque les nombres de la seconde ligne sont obtenus en multipliant ceux de la première ligne par le même nombre : le prix d'un petit pain.

Si dans l'enseignement obligatoire en France de nombreuses procédures de résolution ont été développées au fil du temps, dont la règle de trois¹ (Hersant, 2005), Charnay et Mante (2014) en préconisent trois types à enseigner à l'école primaire, qu'on retrouve dans les moyens d'enseignement – anciens et nouveaux – de Suisse romande :

1. Procédures basées sur les propriétés de linéarité
 - a. Propriété multiplicative de la linéarité (ou propriété du produit) pour le calcul du prix de 14 petits pains

Le quotient de 14 par 2 est 7, donc le prix de 14 petits pains est 5×7 fr. = 35 fr.

Nombre de petits pains	2	14 (= 2 x 7)
Prix en fr.	5	5 x 7 = 35

Cette propriété peut être représentée à l'aide de flèches comme le montre la figure ci-contre :

¹ La règle de trois, qui est une expression contextualisée de la technique du produit en croix (Simard, 2012a), ne sera pas développée dans cet article, conformément aux préconisations des moyens romands.

		x7	
Nombre de petits pains	2		14
Prix en fr.	5		35
		x7	

b. Propriété additive de la linéarité (ou propriété de la somme) pour le calcul du prix de 16 petits pains

Sachant que 2 petits pains coûtent 5 fr. et que 14 petits pains coûtent 35 fr. :

Nombre de petits pains	2	14	16 (= 2 + 14)
Prix en fr.	5	35	5 + 35 = 40

On en déduit que 16 petits pains coûtent 40 fr. Cette propriété peut également être représentée à l'aide de flèches comme le montre la figure suivante :

			+	
Nombre de petits pains	2	14		16
Prix en fr.	5	35		40
			+	

2. Procédure basée sur le passage par la valeur unitaire

Cette procédure s'appuie sur la propriété du produit. On calcule d'abord le prix d'un petit pain puis celui de 14 petits pains :

		:2		x14	
Nombre de petits pains	2		1		14
Prix en fr.	5		2,5		35
		:2		x14	

Le prix d'un petit pain est donc de 2 fr. 50 c. et celui de 14 petits pains de 35 fr.

3. Procédure basée sur le coefficient (ou facteur) de proportionnalité

C'est le coefficient k qui permet de passer de la grandeur « Nombre de petits pains » à la grandeur « Prix en fr. ». Ce coefficient s'obtient en divisant le prix par le nombre de petits pains : 5 divisé par 2 est égal à 2,5.

x2,5		Nombre de petits pains	2	14
		Prix en fr.	5	?

En calculant $14 \times 2,5 = 35$, on trouve le prix de 14 petits pains : 35 fr.

À propos de deux différentes procédures

Nous nous intéressons ici à deux manières différentes de résoudre les problèmes de proportionnalité : à celle relevant de la propriété du produit et à celle utilisant le coefficient de proportionnalité. Dans sa recherche intitulée « Les premières acquisitions de la fonction linéaire », Ricco (1978) a indiqué que l'emploi de l'opérateur fonction (coefficient de proportionnalité) était antérieur à celui de l'opérateur scalaire (propriété du produit) chez les élèves du primaire et que ce dernier n'était employé que plus tardivement (chez les élèves les plus âgés, c'est-à-dire 9-11 ans). De plus, d'après Vergnaud (1979), les élèves du collège [secondaire 1 en Suisse] préféreraient plutôt utiliser la procédure de type scalaire, même dans les situations où elle était d'un emploi plus difficile. D'après Sokona (1989, p. 6), « ce résultat [...] correspondrait à une évolution des procédures (de l'analytique vers l'analogique) au sein du primaire même (des plus jeunes aux plus âgés) et du primaire au collège. »

Si on se réfère maintenant aux plans d'études de Suisse francophone et de Suisse alémanique, on note qu'aucun d'eux ne précise explicitement le type de procédure à favoriser chez les élèves. En revanche, les moyens d'enseignement en vigueur dans les deux régions linguistiques proposent tous deux entre la 6H et la 8H des situations mettant en œuvre les différents types de procédures, opérant ainsi en quelque sorte une synthèse des résultats de Ricco (1978) et Vergnaud (1979). Une étude détaillée est proposée dans l'analyse qui suit.

ANALYSE

Le critère utilisé pour réaliser cette analyse est le type de procédures visées, mentionnées éventuellement dans les plans d'études et/ou préconisées par les livres du maître. On envisage l'utilisation des propriétés de linéarité, le passage par la valeur unitaire et l'utilisation du coefficient de proportionnalité.

Comparaison de la proportionnalité dans les plans d'études

Le Plan d'études romand (CIIP, 2010) est relativement succinct en ce qui concerne la proportionnalité. Pour les classes de 5H à 8H, elle apparaît sous le titre MSN 23 : « Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs... » (cf. Annexe 1), dans les progressions d'apprentissage de la manière suivante : « Résolution de problèmes multiplicatifs et divisifs : situations d'itération, liées au produit cartésien, de produit de mesures, de **proportionnalité** », avec des références liées à la résolution de problèmes (MSN 25 : « Résoudre des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques en identifiant des invariants d'une situation (B), en triant et organisant des données (C), en communiquant ses résultats et ses interprétations (D) »).

En Suisse alémanique, dans le chapitre « *Grössen, Funktionen, Daten und Zufall* » (Grandeurs, fonctions, données et hasard), le *Lehrplan 21* (Staat Freiburg, Direktion für Erziehung, Kultur und Sport [EKSD], o.D.) propose pour le cycle 2 un développement beaucoup plus détaillé et plus concret de cette notion (cf. Annexe 1), en structurant les objectifs selon trois axes dont quelques extraits sont présentés ci-dessous (traduction des auteur·e·s) :

1. « *Operieren und Benennen* » (« Opérer et nommer »)
 - Les élèves comprennent et utilisent [le terme] proportionnalité
 - Ils savent décrire des tableaux de proportionnalité comportant des sommes d'argent et les compléter
 - Ils savent faire des calculs portant sur des relations de proportionnalité (temps-distance, quantité-prix à payer).
2. « *Erforschen und Argumentieren* » (« Explorer-rechercher et argumenter-raisonner »)
 - Les élèves savent explorer des relations entre longueurs, prix et durées
 - Ils savent formuler, explorer et justifier diverses relations fonctionnelles.
3. « *Mathematisieren und Darstellen* » (« Mathématiser et représenter »)

- Les élèves savent représenter et interpréter des données figurant dans des tableaux ou diagrammes et correspondant à des longueurs, des capacités, des masses, des durées, des nombres d'éléments d'un ensemble ou des prix
- Ils reconnaissent des relations de proportionnalité dans des situations concrètes.

En résumé, on note que le *Lehrplan 21* présente de manière plus détaillée et approfondie que le PER les éléments concernant la proportionnalité à développer avec les élèves du cycle 2. On imagine ici plus précisément le type d'exercices qui peut être demandé aux élèves alémaniques ainsi que leur degré d'abstraction alors que le PER mentionne le terme de proportionnalité sans expliciter dans quels types de situations les élèves doivent pouvoir la mobiliser.

Comparaison de la proportionnalité dans les moyens d'enseignement

Dans cette partie, nous allons comparer les manières d'aborder et de traiter la proportionnalité dans les livres du maître et les livres de l'élève francophones et germanophones du cycle 2 (de 5H à 8H). Nous nous référerons aux quatre livres du maître francophones (Danalet et al., 1998a, 1999a ; Chastellain et al., 2001a, 2002a), aux quatre livres de l'élève francophones (Danalet et al., 1998b, 1999b ; Chastellain et al., 2001b, 2002b), aux quatre livres du maître alémaniques (Hengartner et al., 2012, 2013 ; Affolter et al., 2011, 2014) et aux quatre livres de l'élève alémaniques (Hengartner et al., 2008a, 2008b ; Affolter et al., 2012, 2015) en vigueur dans les deux régions linguistiques du canton de Fribourg (cf. Annexe 2). Notre expérimentation s'étant déroulée en 2017, nous nous sommes penchés sur les moyens en vigueur à ce moment-là. Nous compléterons notre comparaison en nous référant également aux moyens ESPER de 5H et 6H qui ont déjà été publiés et à ceux de 7H qui sont en préparation.

On observe que :

- en 5H, les moyens francophones et germanophones proposent tous deux des exercices portant sur les notions de double et de moitié (demi), le moyen francophone introduisant en plus les termes triple, quadruple, tiers et quart ainsi que la recherche de la quatrième proportionnelle, pour laquelle il s'agit de développer une procédure de résolution d'un problème s'énonçant sous la forme : « si a correspond à b, alors c correspond à combien ? ». Le livre du maître francophone de 5H suggère l'utilisation de l'une des propriétés de linéarité ou le passage par la valeur unitaire, sans privilégier quelque méthode que ce soit (Danalet et al., 1998a, p. 173).
- En 6H, on trouve dans les deux moyens – romand et alémanique – des activités autour de l'agrandissement et de la réduction de figures et l'étude de situations concrètes (relation nombre d'objets-prix par exemple). On y introduit le coefficient de proportionnalité et y utilise les propriétés multiplicative et additive de la linéarité, la première propriété pouvant être représentée par des flèches lorsque les données sont présentées dans un tableau. Dans le moyen germanophone est développé en particulier le *Zweisatz*, qui prépare le *Dreisatz* (c'est-à-dire la règle de trois) et qui concerne une situation de proportionnalité plus simple à traiter dans laquelle on connaît l'image de l'unité, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité.
- En 7H, à la suite des activités du degré antérieur, on observe, analyse et interprète dans les livres du maître des deux régions, des tableaux de proportionnalité correspondant à des situations variées de la vie courante. Dans la méthodologie du moyen francophone, on développe les deux propriétés de linéarité (par rapport à la multiplication et à l'addition) à partir d'un exemple de tableaux de nombres et on les représente toutes les deux à l'aide de flèches. Ces représentations n'apparaissent dans la méthodologie alémanique qu'en 8H.
- En 8H, dans les deux moyens, sont analysés et complétés des tableaux de proportionnalité utilisant le coefficient de proportionnalité et les deux propriétés de linéarité représentées par des flèches.

Concernant la proportionnalité dans les nouveaux moyens de la plateforme ESPER (<https://www.cip-esper.ch/#/>) :

- en 5H, on ne trouve aucune information spécifique sur la proportionnalité.

- En 6H, il s'agit avant tout d'appliquer les propriétés de la somme et du produit comme le proposent les activités d'introduction « Plus de bandelettes » et « Multitude de bandelettes ». Les différentes activités proposées en 6H privilégient l'utilisation des propriétés de linéarité et le texte des axes thématiques concernant la proportionnalité sous ESPER 6H suggère aussi de les représenter à l'aide de flèches. Le passage par la valeur unitaire et l'utilisation du coefficient de proportionnalité sont également deux possibilités évoquées dans ce texte.

On constate ainsi que, dans l'ensemble, les recommandations pour le degré 6H sont les mêmes dans les moyens COROME et ESPER, mis à part l'accent mis sur les propriétés de linéarité dans les moyens ESPER.

- En 7H, le texte des axes thématiques concernant la proportionnalité est le même que celui de 6H. Pour le degré 7H, parmi les procédures de résolution des situations de proportionnalité, on relève également le passage par la valeur unitaire et l'utilisation du coefficient de proportionnalité. On dispose en effet à partir de ce degré de la division et des nombres décimaux.

On relève ainsi, dans les moyens francophones et germanophones du cycle 2, une certaine proximité en ce qui concerne le type d'activités proposées et l'introduction des deux propriétés de linéarité et ce, bien que la présentation de la proportionnalité dans le PER soit très brève, comparée à celle du *Lehrplan 21*. Dans les deux moyens, on note l'utilisation de tableaux et la représentation de la propriété de linéarité multiplicative par des flèches à partir de la 6H.

Exemples de résolutions de problèmes de proportionnalité de 6H (4P) dans les moyens des deux régions linguistiques

1) « Anciens moyens » francophones LM 4P (Danalet et al., 1999a, p. 170). Un des problèmes de l'activité « Chez le fleuriste » :

Problème 2

6 roses coûtent 9 francs. Combien coûtent 24 roses ?

roses	prix
6	9 fr.
24	?

Diagramme illustrant la relation de proportionnalité avec des flèches horizontales et verticales reliant les valeurs correspondantes dans les deux colonnes.

Procédures possibles:

- chercher le prix d'une rose, puis chercher le prix de 24 roses
- observer la relation entre 6 et 24 et multiplier 9 par 4
- utiliser une procédure additive, 6 roses + 6 roses + 6 roses + 6 roses coûtent 9 fr. + 9 fr. + 9 fr. + 9 fr.
- ...

2) ESPER MER 6H plateforme ESPER (<https://www.ciip-esper.ch/#/>). Un énoncé simplifié des « Problèmes pêle-mêle » :

5 roses coûtent 18 fr. Combien coûtent 50 roses ?

Corrigé : 50 roses, c'est 10 fois 5 roses ; le prix de 50 roses, c'est donc 10 fois le prix de 5 roses ; $10 \times 18 = 180$.

3) Moyens alémaniques 4. Klasse (6H) LM p. 187 (Hengartner et al., 2013, p. 187). Un des problèmes regroupés sous le titre « Einzelpreis – Gesamtpreis »² :

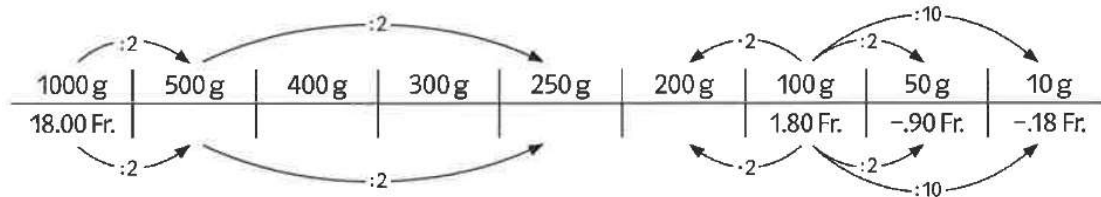
² Traduction des auteur·e·s : « Prix unitaire – Prix total ».

Les calculs dans le tableau de poids-prix peuvent être faits de la manière suivante (exemple du gorgonzola) :

[Le tableau complété]

Pour calculer le prix pour 400 g, on quadruple le prix pour 100 g ou on double le prix pour 200 g, ou encore on déduit le prix pour 100 g du prix pour 500 g. Pour calculer le prix pour 300 g, on triple le prix pour 100 g.

Die Gewichts-Preis-Tabellen können folgendermassen ausgerechnet werden (Beispiel Gorgonzola):



Für 400 g wird der 100-g-Preis vervierfacht oder der 200-g-Preis verdoppelt, oder vom 500-g-Preis wird der 100-g-Preis abgezogen. Für 300 g wird der 100-g-Preis verdreifacht.

Remarque : pour chacune de ces trois activités, au moins l'une des procédures de résolution proposées par les livres du maître respectifs repose sur la propriété du produit. Dans le moyen ESPER, le corrigé ne propose pas de représentation sous forme de tableau ni de flèches. L'utilisation de ce type de représentation, qui figure dans le texte des axes thématiques concernant la proportionnalité sous ESPER 6H, est laissée à l'initiative de l'enseignant·e.

CONCLUSION

Malgré les différences entre les directives des plans d'études, nous avons constaté que les moyens d'enseignement en vigueur en Suisse alémanique et en Suisse romande proposent des exercices assez similaires dans les différents degrés du cycle 2. Nous relevons l'utilisation de tableaux et le fait que les deux propriétés de linéarité sont représentées par des flèches dans les différents moyens d'enseignement. Si dans les nouveaux moyens francophones on note une certaine progression dans les procédures de recherche de la quatrième proportionnelle – l'application des propriétés de linéarité en 6H, puis le passage par la valeur unitaire ou l'utilisation du coefficient de proportionnalité à partir de la 7H –, les moyens germanophones et les moyens COROME utilisent ces différentes procédures en parallèle et de manière complémentaire.

Dans un prochain article, nous rendrons compte d'une expérimentation qui a consisté en la mise en œuvre et la comparaison de deux séquences portant sur l'approche de la proportionnalité en 6H. L'une a été réalisée dans une classe francophone et l'autre dans une classe germanophone du canton de Fribourg. L'attention y est portée en particulier sur les propriétés de linéarité, ainsi que sur l'aide éventuelle à la compréhension et à la résolution apportée par l'utilisation de tableaux et de flèches rendant compte de ces propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

- Affolter, W., Amstadt, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2011). *Schweizer Zahlenbuch 6: Begleitband mit CD-ROM*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Affolter, W., Amstadt, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2012). *Schweizer Zahlenbuch 5: Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Affolter, W., Amstadt, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2014). *Schweizer Zahlenbuch 5: Begleitband mit CD-ROM*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Affolter, W., Amstadt, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2015). *Schweizer Zahlenbuch 6: Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Charnay, R., & Mante, M. (2014). *Professeur des écoles. CRPE Mathématiques. Tome 2*. Paris : Hatier.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001a). *Mathématiques, Cinquième année : Méthodologie - Commentaires*. COROME ; Office romand des éditions et du matériel scolaire.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001b). *Mathématiques, Cinquième année : Livre de l'élève*. Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2002a). *Mathématiques, Sixième année : Méthodologie - Commentaires*. COROME ; Office romand des éditions et du matériel scolaire.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2002b). *Mathématiques, Sixième année : Livre de l'élève*. Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- CIIP. (2010). *Plan d'étude romand*. <https://www.ciip-esper.ch/#/>

- Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998a). *Mathématiques, 3 : Livre du maître - COROME* ; Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- Danalet, C., Del Notaro, C., Dumas, J.-P. & Villars-Kneubühler, F. (1998b). *Mathématiques, Degré : 3e / Degré HarmoS : 5e : Livre de l'élève - COROME* ; Office romand des services cantonaux des éditions et du matériel scolaire.
- Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999a). *Mathématiques, 4 : Livre du maître - COROME* ; Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- Danalet, C., Del Notaro, C., Studer, C., Dumas, J.-P. & Villars-Kneubühler, F. (1999b). *Mathématiques, Degré : 4e / Degré HarmoS : 6e : Livre de l'élève - COROME* ; Office romand des services cantonaux des éditions et du matériel scolaire.
- Gille, E. (2008), *Proportionnalité en Seconde ... et apprentissage de la citoyenneté*. Bulletin de l'APMEP, 474, 11-19.
- Hengartner, E., Müller, G. N., Wieland, G. & Wittmann, C. (2008a). *Schweizer Zahlenbuch 3: Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Hengartner, E., Müller, G. N., Wieland, G. & Wittmann, C. (2008b). *Schweizer Zahlenbuch 4: Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Hengartner, E., Müller, G. N., Wieland, G. & Wittmann, C. (2012). *Schweizer Zahlenbuch 3: Begleitband mit CD-ROM*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Hengartner, E., Müller, G. N., Wieland, G. & Wittmann, C. (2013). *Schweizer Zahlenbuch 4: Begleitband mit CD-ROM*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Hersant, M. (2005). *La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui*. Repères-IREM, 59,
- Ricco, G. (1978). *Le développement de la fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans*. Thèse de doctorat de 3e cycle.
- Simard, A. (2012a). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit x*, 89, 51-62.
- Simard, A. (2012b). Proportionnalité en CM2 et sixième. *Petit x*, 90, 35-52.
- Sokona, S.-B. (1989). Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation. *Petit x*, 19, 5-27.
- Staat Freiburg, Direktion für Erziehung, Kultur und Sport EKSD. (o.D.). *Fachbereich Mathematik*.
- Vergnaud, G. (1979). *Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré*. IREM d'Orléans.
- Weiss, L. (2012). Les modèles réduits : comment les considérations sur la masse d'un objet permettent d'approfondir la réflexion sur la proportionnalité. *Math-École*, 218, 24-27.

ANNEXE 1 - COMPARAISON DES PLANS D'ÉTUDES AU SUJET DE LA PROPORTIONNALITÉ

le PER (Plan d'études romand) de Suisse romande

	PER
5H–8H	<p>Dans « MSN 23 – Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs... » :</p> <p>Résolution de problèmes multiplicatifs et divisifs : situations d'itération, liées au produit cartésien, de produit de mesures, de proportionnalité (B, C, D)</p> <p>Remarque du PER :</p> <p>Certains élèves confondent augmentation (ou diminution) et proportionnalité, pensant que toute augmentation est forcément proportionnelle et utilisent de ce fait la proportionnalité à mauvais escient.</p> <p>De plus, certains élèves pensent qu'il y a proportionnalité si on ajoute un même nombre aux deux nombres ou grandeurs proportionnels, l'idée d'augmentation étant souvent liée à l'addition (celle de diminution à la soustraction)</p>

Le Lehrplan 21 de Suisse alémanique

	Lehrplan 21
5H –8H	<p>Dans « Grössen, Funktionen, Daten und Zufall » :</p> <p>Operieren und Benennen – Zyklus 2</p> <ul style="list-style-type: none"> - Die SchülerInnen verstehen und verwenden [den Begriff] Proportionalität. - Sie können Wertetabellen zu proportionalen Zusammenhängen mit Geldbeträgen beschreiben und weiterführen (z. B. 100 g → 5.40 Fr.; 200 g → 10.80 Fr.; 300 g → 16.20 Fr., ...) - Sie können funktionale Zusammenhänge in Wertetabellen erfassen (z. B. zurückgelegte Distanzen bei einer Geschwindigkeit von 4.5 km/h nach 10 min, 20 min, 30 min, ...). - Sie können mit proportionalen Beziehungen rechnen (z. B. 300 g Käse zu 20 Fr./kg; Treibstoffverbrauch für 700 km zu 6 l/100 km). - Sie können Anteile bestimmen und vergleichen (z. B. in X mit 2 Spielwarengeschäften leben 12 000 Menschen; in Y mit 8 Spielwarengeschäften leben 30 000 Menschen). <p>Erforschen und Argumentieren – Zyklus 2</p> <ul style="list-style-type: none"> - Die SchülerInnen können Beziehungen zwischen Längen, Preisen und Zeiten überprüfen (z. B. grössere Gegenstände sind teurer oder weitere Wege brauchen mehr Zeit). - Sie können zu Beziehungen zwischen Grössen Fragen formulieren, erforschen, und funktionale Zusammenhänge überprüfen (z. B. die Füllhöhe von ½ Liter, 1 Liter, 2 Liter in verschiedenen Gefässen, das Verhältnis zwischen Preis und Gewicht eines Produkts, das Gewicht eines Lightgetränks und einer Limonade). - Sie können funktionale Zusammenhänge, insbesondere zu Preis-Leistung und Weg-Zeit, formulieren und begründen <p>Mathematisieren und Darstellen – Zyklus 2</p> <ul style="list-style-type: none"> - Die SchülerInnen können Daten zu Längen, Inhalten, Gewichten, Zeitdauern, Anzahlen und Preisen in Tabellen und Diagrammen darstellen und interpretieren (z. B. zu Haustieren).

	<ul style="list-style-type: none"> - Sie erkennen in Sachsituationen Proportionalitäten (z. B. zwischen Anzahl Schritten und Distanz). - Sie können zu einer proportionalen Wertetabelle Zusammenhänge beschreiben (z. B. die Anzahl min je zurück-gelegtem km)
--	--

ANNEXE 2 - COMPARAISON DES MOYENS COROME ET ESPER EN SUISSE ROMANDE ET DU ZAHLENBUCH EN SUISSE ALÉMANIQUE AU SUJET DE LA PROPORTIONNALITÉ

Remarque : dans le canton de Fribourg, le moyen de 5H de la plateforme ESPER a été introduit en septembre 2021 et celui de 6H le sera seulement en septembre 2022. Ainsi la séquence francophone sur la proportionnalité qui a été conduite en 6H au cours de l'année 2017 s'est référée aux « anciens » moyens COROME. C'est la raison pour laquelle dans le tableau de comparaison suivant on se rapporte à ces derniers moyens.

Légende

LM : livre du maître BB: *Begleitband* (livre du maître) linéarité x : propriété du produit
 LE : livre de l'élève SB: *Schulbuch* (livre de l'élève) linéarité + : propriété de la somme
 FE : fichier de l'élève

Moyens COROME (papier) 5H
LE p. 53 : Quel âge ? (double, triple, demi, tiers)
LM p. 179 – LE p. 62 : Tarte (double, triple, quadruple, demi, tiers, quart, etc.)
LM p. 173 : Résolution de problèmes de proportionnalité (recherche de la quatrième proportionnelle)
<i>Zahlenbuch 5H</i>
BB p. 65-66 – SB p. 16-17 : <i>Verdoppeln, halbieren</i>
Moyens COROME (papier) 6H
Comparaison ou vérification d'informations conduisant à utiliser la proportionnalité :
LM p. 166 – LE p. 89 – FE p. 45 : Agrandir des rectangles selon un coefficient fixé
LM p. 182 – LE p. 30 : Dites-le avec des fleurs. Il s'agit d'un problème de proportionnalité que l'on peut résoudre en utilisant le passage par la valeur unitaire ou par application des propriétés de la somme et du produit
LM p. 170 : Chez le fleuriste (recherches de la quatrième proportionnelle selon différentes procédures : passage par la valeur unitaire, utilisation du coefficient de proportionnalité, application des propriétés de la somme et du produit)
LM p. 171 – LE p. 31 : En promotion
LM p. 184 : Festin (apparaissent le coefficient de proportionnalité, la linéarité x et la linéarité +, avec des flèches pour x)
<i>Zahlenbuch 6H</i>
BB p. 185-188 – SB p. 64-65 : Einzel- und Gesamtpreis (utilisation implicite du facteur de proportionnalité en appliquant le Zweisatz ; apparaissent également la linéarité x et la linéarité +, avec des flèches pour x)
BB p. 199-201 – SB p. 71 : Im Einkaufszentrum – Angebote vergleichen (linéarité x)

BB p. 203-206 – SB p. 72-73 : Vergrössern und verkleinern nach Massstab

BB p. 207-211 – SB p. 74-75 : Preislisten – Überlegen und ausprobieren

BB p. 277- 278 – SB p. 94-95 : Sachrechnen im Kopf

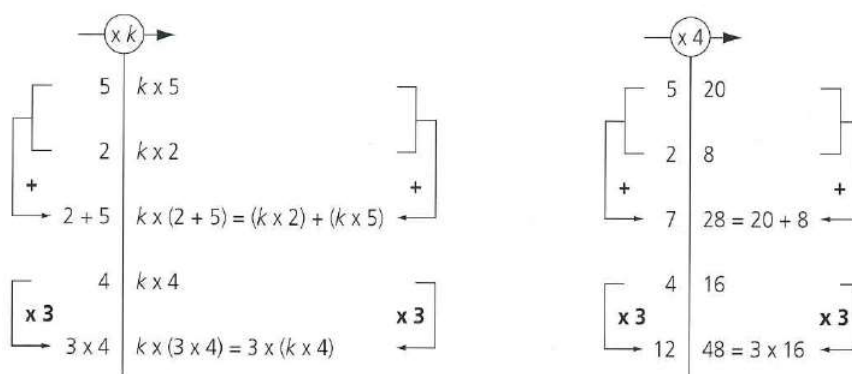
BB p. 299-300 – SB p. 103 : Wasserverbrauch – Rechnerische Durchdringung eines Sachthemas

Moyens COROME (papier) 7H

LM p. 161-178 : « Thème 9 Applications » exercices du type « La balance » LE p. 87 :

- observer des situations où interviennent des applications, en extraire les éléments pertinents, les organiser ;
- analyser et interpréter des tableaux et des représentations graphiques ;
- rechercher des liens entre deux grandeurs variables, chercher à les exprimer par des relations arithmétiques afin de les faire « fonctionner » pour d'autres valeurs des variables ;
- **distinguer les cas de linéarité, connaître leurs propriétés et les appliquer.**

LM p. 164-165 Les deux aspects de la linéarité :



Par le schéma précédent, on constate qu'on pourrait ignorer le facteur de linéarité (les liens horizontaux) et se « tirer d'affaire » en reproduisant les mêmes opérations entre nombres, d'un ensemble à l'autre :

- à l'image de la somme de 5 et de 2, on fait correspondre la somme des images de 5 et de 2 (propriété de la somme) ;
- à l'image du produit de 4 par 3, on fait correspondre le produit par 3 de l'image de 4 (propriété du produit).

Zahlenbuch 7¹¹

BB p. 181-185 – SB p. 52-53 : Vergrössern und verkleinern (linéarité \times et linéarité $+$, avec des flèches pour \times)

BB p. 187-192 – SB p. 54-55 : Preistabellen – Preisberechnungen (tableau et coefficient de proportionnalité)

BB p. 287-292 – SB p. 90-91 : Gefässe füllen (linéarité \times et linéarité $+$, avec des flèches pour \times)

Moyens COROME (papier) 8H

LM p. 173-196 : « Thème 7 Applications » exercices du type « Histoires de proportions » LE p. 76 :

- observer des situations où intervient la notion d'application pour en extraire les données significatives et les organiser, en distinguant, en particulier, les ensembles de départ et d'arrivée ;
- représenter ces situations par différents modèles : **tableaux**, « boîtes noires », graphiques, ... ;
- découvrir les lois de fonctionnement d'une **application linéaire** : **la règle du produit, celle de la somme** et l'existence d'un facteur de linéarité ;
- **compléter des tableaux de grandeurs proportionnelles en utilisant les lois découvertes précédemment** ;
- comparer des applications linéaires à d'autres qui ne le sont pas.

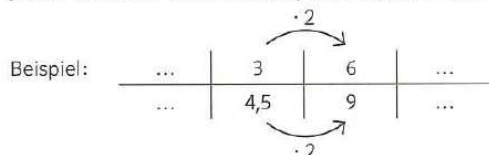
Zahlenbuch 8H

BB p. 165-170 – SB p. 30-31 : Tabellen untersuchen (linéarité x et linéarité +, avec des flèches pour x et pour +)

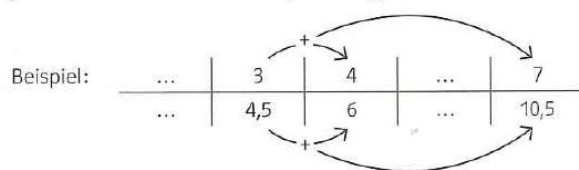
SB p. 30 :

Proportionalitätstabellen erkennt man an folgenden Eigenschaften:

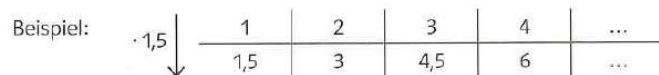
1. Jedes Vielfache eines Zahlenpaars ergibt wieder ein Zahlenpaar der Tabelle.



2. Jede Summe zweier Zahlenpaare ergibt wieder ein Zahlenpaar der Tabelle.



3. Jede Zahl der Zeile x multipliziert man mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor und erhält so die entsprechende Zahl in der Zeile y.



SB p. 52-53 : Wandern – Kilometer pro Stunde

SB p. 54-55 : Zug fahren – Geschwindigkeit