UNE DÉMARCHE ALGÉBRIQUE SURPRENANTE

Sylvain Vermette, Mathieu Séguin

Université du Québec à Trois-Rivières

Mots clé : Mobilisation des connaissances de l'enseignant, raisonnement algébrique d'élève, équation du second degré, formation des enseignants

Résumé : En tant que didacticien des mathématiques, je suis amené par mes travaux de recherche à être en classe et à travailler avec des élèves autant du primaire, du secondaire que de l'université. Lors de ces visites et de ces travaux, je suis parfois stupéfait par ce que les élèves m'offrent, à travers divers raisonnements, erreurs, questions, stratégies et solutions. C'est à partir de la démarche d'un élève lors de la résolution d'une équation du second degré que je propose de tirer des réflexions.

LA MOBILISATION DES CONNAISSANCES DE L'ENSEIGNANT DANS SA PRATIQUE

On reconnaît maintenant que l'enseignant de mathématiques mobilise dans sa pratique des formes spécifiques de connaissances, différentes des formes standards apprises dans les cours de mathématiques universitaires (Ball, Thames & Phelps, 2008 ; Moreira & David, 2005, 2008 ; Margolinas, Coulange & Bessot, 2005). En effet, les récents développements sur les connaissances mathématiques des enseignants montrent que certaines connaissances prennent leur source dans la pratique d'enseignement, celles-ci étant donc reliées aux évènements émergeant du contexte d'enseignement-apprentissage (Bednarz & Proulx, 2009 ; Davis & Simmt, 2006 ; Margolinas, 2014). Par exemple, lors de l'enseignement-apprentissage de concepts mathématiques, différentes situations peuvent survenir et être prises en compte par l'enseignant. Pensons aux raisonnements (adéquats ou non) permettant de donner un sens aux concepts ; aux conceptions, difficultés et erreurs sur les concepts travaillés et leurs compréhensions ; aux stratégies et approches diverses pour résoudre un problème ; aux représentations et symbolismes/écritures variées (standards ou non) pour exprimer une solution ; aux questions nouvelles et avenues à explorer, etc. (Bednarz & Proulx, 2009) Ces évènements mathématiques ne se réfèrent pas uniquement aux concepts présents dans les curricula scolaires, qui établissent ce qui doit être enseigné, mais se réfèrent aussi aux éléments mathématiques qui entourent l'enseignement-apprentissage des mathématiques et avec lesquels l'enseignant doit travailler en classe. Ces travaux ont ouvert la voie à de nouvelles façons de penser la formation mathématique des enseignants, contribuant à interroger les structures en place à la formation des enseignants et à convaincre de la nécessité d'un changement d'orientation. Ils sont à la base d'une re-conceptualisation de la composante mathématique de cette formation, à l'opposé de celle caractérisant plusieurs programmes de formation dans le monde, dans lesquels l'accent est mis sur des cours de mathématiques académiques très loin de la pratique mathématique en classe des enseignants (Bednarz & Proulx, 2009, 2010 ; Moreira & David, 2008). À cela s'ajoute le passage de l'idéal didactique aux déroulements réels en classe. Bref, le fossé existant entre la nature des expériences que vivent les enseignants durant leur formation initiale et les expériences qu'ils vivent dans leurs pratiques quotidiennes de classe constitue un enjeu pour la formation des enseignants en mathématiques.

Les connaissances mathématiques mobilisées par l'enseignant dans sa pratique ne renvoient généralement pas aux mathématiques enseignées en formation initiale soit des mathématiques considérées pour elles-mêmes, déconnectées et décontextualisées de la pratique. De cette conceptualisation des connaissances mathématiques scolaires des enseignants, qui se distinguent des mathématiques académiques (Proulx & Bednarz, 2010, 2011), il apparaît trois dimensions. (1) D'abord, leur nature, elles sont plus près d'un savoir-agir que de connaissances factuelles, « statiques », que l'on peut s'approprier indépendamment de la pratique de classe qui leur donne sens (Bednarz & Proulx, 2009). Des travaux de recherche conduits en didactique des mathématiques sur les pratiques enseignantes montrent bien ces gestes professionnels qui sont développés dans l'action (e.g. Butlen, 2006 ; Roditi, 2005, 2013). (2) Ensuite, ces connaissances sont situées (Lave, 1988), elles s'élaborent dans un certain contexte lié à la pratique d'enseignement. Celles-ci ne sont pas indépendantes de l'apprentissage des élèves, de la classe, du contexte dans lequel elles entrent en jeu. (3) Finalement, ces connaissances sont ce que Mason et Spence (1999) appellent « knowing-to act in the moment ». Ainsi, ce savoir-enseigner de l'enseignant se construit en classe et s'adapte en temps réel à la situation, en réaction à celle-ci. On parle ici de connaissances déployées sur-le-champ, liées à l'intervention en réponse à un évènement (un script qui sort de la planification initiale, une question surprenante d'un élève, une réponse inattendue, une erreur non prévue, etc.). Vouloir intervenir sur-le-champ peut alors représenter un défi important. Cet article veut, par un exemple, illustrer ce qui précède et montrer par le fait même qu'une analyse de productions d'élèves peut parfois mener à des réalisations mathématiques fascinantes.

La résolution d'une équation du second degré

Dernièrement, lors d'une visite en classe au Québec, j'ai été témoin du raisonnement erroné d'un élève de 4e secondaire (15-16 ans), au cours d'une séquence d'enseignement portant sur la factorisation, lorsque venu le temps de résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Dans ce qui suit, la démarche attendue par l'enseignant au premier exercice présenté est décrite ainsi que la démarche proposée par l'élève.

Résoudre pour x : $2x^2 + 5x + 3 = 0$

Démarche possible	Démarche de l'élève
$2x^2 + 5x + 3 = 0$	$2x^2 + 5x + 3 = 0$
$2x^2 + 2x + 3x + 3 = 0$	$x^2 + 5x + 6 = 0$
$2x (x + 1) + 3 (x + 1) = 0$	$(x + 3) (x + 2) = 0$
$(2x + 3) (x + 1) = 0$	
$x_1 = -3/2 \quad x_2 = -1$	$x_1 = -3 \quad x_2 = -2$

Nous sommes en présence d'une équation du second degré qu'il faut résoudre. Pour y arriver, la factorisation en produit de facteurs du premier degré s'avère être une stratégie intéressante puisqu'il est aisé d'appliquer la « méthode » somme-produit dans le cas spécifique de ce trinôme. Ceci explique fort probablement pourquoi il s'agit non seulement de la démarche mobilisée par l'enseignant pour résoudre l'équation en question, mais aussi de celle attendue chez l'élève. Lorsque l'élève est intervenu en classe afin de faire connaître sa démarche, l'enseignant a été déstabilisé. Ce dernier devait analyser en temps réel une stratégie d'élève qui peut paraître déroutante et à laquelle il n'était pas préparé à faire face. Il aurait été possible pour lui de balayer du revers de la main la démarche de l'élève. En mathématique, il n'est pas rare d'associer simplement les erreurs des élèves à l'inattention, au manque de travail ou aux incompréhensions. Toutefois, l'enseignant y a démontré un certain intérêt et a cherché plutôt à comprendre la stratégie de l'élève en prenant soin de lui demander d'expliquer en détail chaque étape de son raisonnement. Cependant, ne voyant pas comment exploiter sur-le-champ la démarche de l'élève afin de contribuer à la situation d'enseignement apprentissage, l'enseignant décida plutôt de revenir à la démarche attendue en mentionnant que la démarche de l'élève ne permettait pas d'arriver à trouver les « bonnes » valeurs de x. Il faut avouer qu'il n'est pas toujours évident de voir la richesse mathématique qui se cache derrière l'erreur. Certes une analyse a priori de la tâche aurait peut-être pu aider l'enseignant à relever le défi qui se présentait à lui ici, soit de mobiliser des connaissances mathématiques scolaires au regard de la stratégie véhiculée par l'élève. Au même moment, l'analyse a priori d'une tâche n'est pas un exercice nécessairement exhaustif. En effet, il peut être difficile d'anticiper l'ensemble des réactions possibles des élèves en classe. Parfois un recul s'avère nécessaire afin de permettre une analyse plus en profondeur des évènements qui ont émergé du contexte d'enseignement-apprentissage. Prêtons-nous au jeu et procédons maintenant à une analyse a posteriori de la démarche erronée de l'élève qui à première vue fait peu de sens.

À partir de la forme générale $ax^2 + bx + c$, son raisonnement revient en quelque sorte à transférer le facteur multiplicatif du coefficient a au coefficient c pour obtenir une nouvelle expression algébrique de la forme

$x^2 + bx + c_1$, où le coefficient c_1 résulte de la multiplication du coefficient a et du coefficient c. Dans le cas qui nous concerne, l'élève divise le 1er terme par 2 pour ensuite multiplier le 3e terme par 2. Ces actions laissent en quelque sorte l'impression d'annuler l'effet des transformations sur l'équation algébrique initiale puisque deux opérations inverses, diviser par 2 pour ensuite multiplier par 2, ont été effectuées. Toutefois, une telle transformation ne permet pas d'obtenir une équation équivalente, c'est-à-dire une équation qui admet le même ensemble solution, afin de trouver la valeur de l'inconnue qui vérifie l'équation initiale. Pour y arriver, il aurait fallu opérer sur chacun des termes de l'équation de la même façon, par exemple en multipliant chacun des termes de l'équation par 2 afin d'obtenir l'équation $4x^2 + 10x + 6 = 0$. Cette nouvelle équation obtenue aurait alors été équivalente à celle initiale.

Quel pourrait être l'intérêt pour l'élève de procéder ainsi ? La raison invoquée par ce dernier est qu'il s'avère plus simple pour lui de résoudre une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$ en comparaison avec une autre de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. En effet, pour une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$, il suffit d'abord de factoriser le trinôme avec la « méthode » somme-produit en cherchant deux entiers dont la somme est le coefficient de x et dont le produit équivaut à c puisque le coefficient a vaut 1, soit l'élément neutre de la multiplication. Les deux entiers de signes opposés à ceux trouvés correspondent ensuite à la solution recherchée. Résoudre une équation sous cette forme exige ainsi moins de manipulations algébriques, ce qui pourrait même contribuer à y arriver mentalement. La problématique soulevée précédemment demeure toutefois, car la démarche de l'élève pour obtenir une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$ ne permet pas de générer une équation équivalente. L'équation équivalente à celle initiale comportant un coefficient a valant 1 aurait été obtenue ici en divisant chaque terme de l'équation par 2, l'équation résultante aurait alors été $x^2 + 5/2\ x + 3/2 = 0$. Cette expression peut présenter un défi de factorisation plus important chez certains élèves notamment puisqu'elle admet des coefficients b et c écrits sous la forme de fractions, ce qui complexifie l'exercice de factorisation. Imaginons un second exercice qui illustre bien ce qui précède.

Résoudre pour x : $14x^2 - 19x - 3 = 0$

Démarche possible	Démarche (simulée) de l'élève
$14x^2 - 19x - 3 = 0$	$14x^2 - 19x - 3 = 0$
$14x^2 - 21x + 2x - 3 = 0$	$x^2 - 19x - 42 = 0$
$7x\ (2x - 3) + 1\ (2x - 3) = 0$	$(x - 21)\ (x + 2) = 0$
$(2x - 3)\ (7x + 1) = 0$	
$x_1 = 3/2 \quad x_2 = -1/7$	$x_1 = 21 \quad x_2 = -2$

L'équation équivalente dans ce second exemple avec un coefficient a ayant une valeur de 1 serait : $x^2 - 19/14\ x - 3/14 = 0$. On constate au regard de cette nouvelle équation, équivalente à celle initiale, que la démarche de l'élève apparaît beaucoup plus intéressante afin de simplifier l'exercice de factorisation. Bien entendu, cette démarche est erronée, mais l'est-elle vraiment ? Il est possible de constater à partir des deux exercices présentés que la réponse obtenue par l'élève n'est pas très loin de celle désirée. En fait, la démarche de l'élève « grossit » la réponse d'un facteur a. Dit autrement, les valeurs de x trouvées à partir de la démarche de l'élève correspondent aux valeurs de la solution recherchée multipliées par la valeur du coefficient a ($21 = 3/2 \cdot 14$ et $-2 = -1/7 \cdot 14$). Il suffirait donc à l'élève de réaliser une étape supplémentaire pour compléter sa démarche et obtenir par le fait même la bonne réponse soit de diviser les valeurs de x obtenues par la valeur du coefficient a de l'équation initiale. En agissant ainsi, il réinvestirait le coefficient utilisé au départ afin de générer sa nouvelle équation, comme s'il faisait en quelque sorte le chemin inverse pour retourner au point de départ. Par exemple, dans le second exemple, il suffirait à l'élève de diviser les valeurs de x par 14 afin de trouver que $x_1 = 21/14 = 3/2$ et que $x_2 = -2/14 = -1/7$ soit la solution recherchée.

Tentons de comprendre le raisonnement mathématique sous-jacent à la procédure spécifique utilisée par l'élève. Comme l'hypothèse d'équations algébriques équivalentes a été rejetée précédemment, explorons une solution graphique qui s'inscrit dans le cadre des fonctions. Pour ce faire, débutons par faire une table de valeurs liée aux trinômes de l'exercice 1 que l'on associe à une relation du second degré, soit f(x) = $2x^2 + 5x + 3$ et g(x) = $x^2 + 5x + 6$.

×2 ×2 ×2

x	0	1	2	4	8
$f(x) = 2x^2 + 5x + 3$	3	10	21	55	171
$g(x) = x^2 + 5x + 6$	6	12	20	42	110

×2 ×2 ×2

En observant attentivement cette table de valeurs, une régularité ressort entre les points des fonctions *f* et *g*. En effet, il est possible de générer les points de la fonction *g* en doublant les coordonnées des points de la fonction *f*. En d'autres termes, à chaque point de la fonction *f*, il est possible de lui associer un point de la fonction *g* en multipliant ses coordonnées par 2. Par exemple, le point (0, 3) appartenant à la fonction *f* permet de générer le point (0, 6) qui, lui, appartient à la fonction *g*. Dans le même sens, il est possible d'associer les points qui suivent :

Points de la fonction *f*		Points de la fonction *g*
(1, 10)	$\longmapsto$	(2, 20)
(2, 21)	$\longmapsto$	(4, 42)
(4, 55)	$\longmapsto$	(8, 110)

Il s'avère alors que l'élève effectue à chaque point de la fonction *f* une homothétie de centre (0, 0) avec un rapport de 2, soit la valeur du paramètre a de la fonction *f*. De façon plus générale, il associe à chaque couple (x, y) de la fonction *f* un couple deux fois plus grand, (x, y) $\longmapsto$ (2x, 2y), ce qui engendre la fonction *g*. Voici un graphique qui permet de bien visualiser cette homothétie de centre O, qui associe à chaque point de la fonction initiale *f* un point image, créant ainsi la fonction *g*, la fonction image.

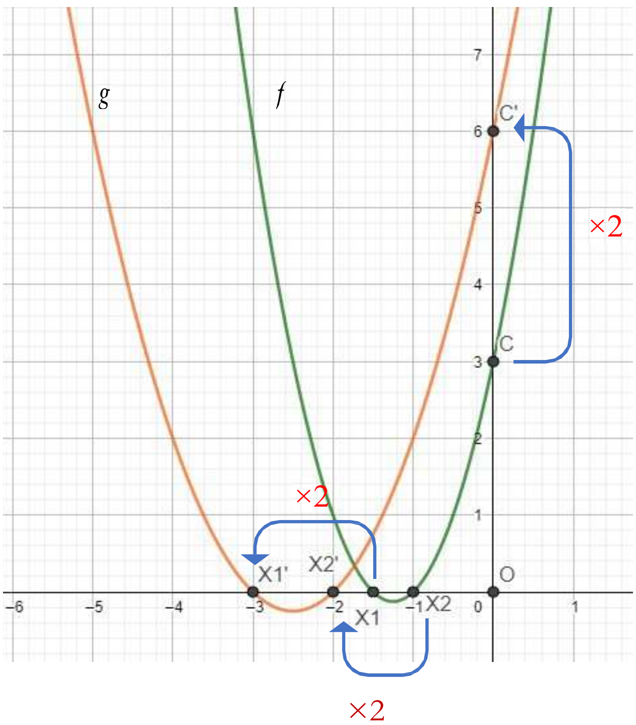

Fig. 1 : Homothétie de la fonction *f* de centre (0,0)

Dans le cas du calcul des zéros effectué par l'élève à l'exercice 1, les zéros trouvés correspondent à ceux de la fonction image engendrée par l'homothétie, soit g(x). Pour retrouver les zéros de la fonction *f*, l'élève n'a qu'à faire l'homothétie inverse, soit une homothétie de centre O avec un rapport de 1/2, ce qui revient à diviser les zéros obtenus par 2. Cette procédure est généralisable pour toute homothétie de centre (0, 0) et de rapport *a* où on peut associer à chaque couple initial (x, y) un couple image (ax, ay).

$$(x, y) \longmapsto (ax, ay)$$

En substituant y par une fonction f(x) de la forme $ax^2 + bx + c$ afin de voir l'effet de l'homothétie sur celle-ci, on obtient :

$$(x, f(x)) \longmapsto (ax, af(x))$$

Pour une valeur initiale quelconque de x, on obtient un point image qui a subi une homothétie, transformant autant ce x initial que son y initial. Si on s'intéresse à l'ordonnée de ce même x initial après avoir subi l'homothétie, on doit alors diviser ce x par a pour retrouver son y image dans la fonction initiale. Dans ce cas précis, la fonction initiale dépend alors de x/a.

En substituant x dans la fonction initiale de $ax^2 + bx + c$ par x/a, on obtient :

$a \cdot f(x/a)=a(a(x/a)^2+b(x/a)+c)$ [par substitution]

$a \cdot f(x/a)=a(a(x^2/a^2)+b(x/a)+c)$ [par les propriétés des exposants]

$a \cdot f(x/a)=a(x^2/a+bx/a+c)$ [par simplification]

$a \cdot f(x/a)=x^2+bx+a \cdot c$ [par distributivité]

La démonstration algébrique qui précède illustre que pour toute fonction de la forme $ax^2+bx + c$, il existe une deuxième fonction de la forme $x^2 + bx + c_1$ où $c_1 = a \cdot c$, obtenue par homothétie de centre (0, 0) et de rapport *a*. Un intérêt possible d'utiliser cette deuxième fonction est qu'elle permet de calculer plus facilement les deux zéros en prenant l'opposé des deux nombres dont la somme équivaut à b et le produit à c_1. Retrouver les zéros de la fonction initiale peut alors être plus accessible en effectuant l'homothétie inverse, c'est-à-dire de rapport 1/a.

$$(ax, af(x)) \longmapsto (x, f(x))$$

Conclusion

L'intention derrière cet article était double. D'abord, il voulait alimenter la réflexion mathématique et didactique au regard de la démarche d'un élève, observée lors d'une visite en classe, au moment venu de résoudre une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Bien entendu, ce ne sont évidemment pas toutes les erreurs ou tous les raisonnements d'élèves qui ont le même potentiel mathématique. Mais il appert, comme nous avons voulu le montrer ici, que si nous prenons le temps de nous y attarder, des richesses mathématiques peuvent parfois émerger. Il voulait ensuite illustrer qu'il n'est pas toujours simple pour un enseignant de mobiliser ses connaissances dans la pratique et d'intervenir lorsque confronté notamment à des stratégies d'élèves. L'enseignant doit souvent s'adapter en temps réel à des réponses ou raisonnements d'élèves manifestés dans l'action, vécus en classe, en réaction à ceux-ci et n'étant pas nécessairement prévus. On y voit là un enjeu lié à la formation initiale des enseignants en mathématiques puisque cette interaction entre formation et pratique de classe soulève des préoccupations. Il semble y avoir un besoin de formation chez les enseignants en lien étroit avec un travail articulé au contexte d'enseignement. Étant donné les limites possibles de la formation initiale et les expériences vécues en classe, un dispositif de formation continue orienté sur des mathématiques enracinées dans la pratique d'enseignement prend alors tout son sens afin de contribuer au développement professionnel des enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bednarz, N. & Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : Clarifications conceptuelles et épistémologiques. *For the learning of mathematics*, *29*(3), 11-17.

Bednarz, N. & Proulx, J. (2010). Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : Exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques. *Éducation et Formation*, *e-293*, 21-36.

Butlen, D. (2006). Stratégies et gestes professionnels de professeurs des écoles débutants enseignant dans des écoles de milieux défavorisés : un enjeu pour les apprentissages des élèves. Dans N. Bednarz & C. Mary (dir.), *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés.* Actes du colloque Espace Mathématique Francophone. Sherbrooke, Canada : éditions du CRP. CD-ROM.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge University Press.

Margolinas, C., Coulange, L. & Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 205-234.

Margolinas, C. (2014). Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie*, *188*, 13-22.

Mason, J. & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 135-161.

Moreira, P. C. & David, M. M. (2005). *Mathematics in teacher education versus mathematics in teaching practice.* ICMI-15 Study - The professional education and development of teachers of mathematics. Sao Paolo, Brazil. CD-ROM.

Moreira., P. C. & David, M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal for Mathematics Teacher Education*, *11*(1), 23-40.

Proulx, J. & Bednarz, N. (2010). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1 : Réflexions fondées sur une analyse des recherches. *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana*, *1*(1), 1-24. https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2187

Proulx, J. & Bednarz, N. (2011). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 2 : Une entrée potentielle par les mathématiques professionnelles de l'enseignant. *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana*, *1*(2), 1-23. https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/viewFile/2271/1833

Roditi, É. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques*. L'Harmattan.

Roditi, É. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques*, *15*, 39-60.