CONSTRUCTION D'UNE DÉFINITION EN GEOMETRIE : CONCEPT-IMAGE DES ETUDIANTS SUR LA FIGURE ET SES DESSINS

Patrick Tchonang Youkap, Judith Njomgang Ngansop, Nchia Ntam Lawrence

École Normale Supérieure de Yaoundé

Cet article a pour objectif d'explorer les connaissances des étudiants sur la figure et ses dessins en situation de construction d'une définition en géométrie. Il en résulte que les difficultés des étudiants pour construire une définition acceptable proviendraient d'un concept-image incohérent sur les figures manipulées, leurs images mentales semblant prendre le dessus sur les propriétés conceptuelles des figures.

Mots clés : figure, dessin, concept-image, construction de la définition.

INTRODUCTION

La figure géométrique est perçue comme un objet géométrique sur lequel repose le raisonnement, c'est un objet abstrait, un objet idéel tandis que le dessin est la trace laissée sur un support de représentation que symbolise l'écran (Laborde, 1994; Parzysz, 1988). Les programmes de mathématiques du secondaire (âges des élèves de 11 à 17 ans) au Cameroun recommandent d'impliquer les élèves dans la construction de leurs connaissances sur les figures étudiées en géométrie. Toutefois, les définitions des figures géométriques sont proposées de façon axiomatique, d'autres figures ne sont pas définies, seuls leurs dessins sont présentés aux élèves (Tchonang, Njomgang, Tieudjo, & Pedemonte, 2020). On pourrait penser que les élèves mémorisent les définitions qui leur sont présentées et construisent leurs définitions en interprétant les dessins qu'ils rencontrent au cours de leur expérience avec la figure. On peut donc craindre que cette façon de procéder ait des répercussions sur la compréhension des figures par les élèves, ce qui pourrait résister après leurs études secondaires.

Des recherches antérieures se sont intéressées à la définition en mathématiques (De Villiers, 1998 ; Fischbein & Nachlieli, 1998 ; Tchonang, 2021). De Villiers (1998) et Vinner (1991). Elles rapportent que, lorsque la définition est donnée de façon axiomatique aux élèves, celle-ci peut être oubliée ou encore que les élèves peuvent construire des définitions personnelles qui sont en contradiction avec la définition formelle. De Villiers (1998) pense que les élèves devraient être impliqués activement dans le processus de construction des définitions des objets géométriques. Vodušek et Lipovec (2014) observent que les réflexions des enseignants du primaire se limitent à l'image visuelle du carré en situation de résolution de problème. La forme du carré contenues dans leurs images mentales domine sur les éléments conceptuels de cet objet. Noirfaliste (1991) observe que certaines figures sont mentalement plus prégnantes que d'autres. Elles agissent quelques fois comme des obstacles dans la résolution des problèmes, il les appelle figures « prototypes ». Parzysz (1988) et Duval (1988) observent que le dessin joue un rôle de premier plan dans la construction des connaissances en géométrie au début du collège (élèves de 12-15 ans) et peut induire des fausses conceptions chez les élèves. Ces travaux précédents montrent que les connaissances des élèves du secondaire sur la figure et ses dessins ne sont pas toujours conformes à la théorie sur ces objets. Qu'en est-il des étudiants ? L'objectif de cette étude est de mettre en lumière les connaissances des étudiants sur la figure et ses dessins en situation de construction d'une définition de la congruence de deux triangles.

CADRE THÉORIQUE

D'après Fischbein et Nachlieli (1998) la figure géométrique a deux propriétés fondamentales : une propriété conceptuelle et une propriété sensorielle (constitué des images mentales qui lui sont associées). Le cadre théorique de cette étude est constitué du modèle concept-image concept-définition (Vinner, 1983 ; Vinner & Hershkowitz, 1980) et des paradigmes en géométrie (Houdement & Kuzniak, 2006).

Le concept-image concept-définition est un cadre théorique qui peut guider le professeur et le chercheur dans la compréhension du processus mental de l'élève associé à un concept (Vinner, 1983). Le concept-image est constitué des images mentales, des propriétés et des processus associés à un concept (figure) dans la mémoire d'un individu. Le concept-définition est la définition verbale du concept qui peut être mémorisée et répétée. Il permet à un individu d'appliquer son concept-image à une figure. L'apprenant qui interprète un dessin et décrit une figure géométrique mobilise les éléments de son concept-image sur ces objets. Le concept-image d'un individu sur une figure peut ne pas être cohérent et avoir des aspects qui sont très différents du système axiomatique formel. De notre point de vue, avoir un concept-image cohérent sur une figure c'est pouvoir établir des connexions cohérentes entre ses composantes conceptuelles et sensorielles.

Houdement et Kuzniak (2006) ont élaboré un outil théorique pour enrichir le regard porté sur l'enseignement de la géométrie. Ces auteurs identifient trois paradigmes géométriques et décrivent les modes de pensée (l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif) inhérents à ces paradigmes. Les deux paradigmes que nous décrivons ici sont les seuls présents au secondaire.

La géométrie I (GI) : elle est encore appelée géométrie naturelle du fait de sa proximité avec le monde sensible. Ce qui est vrai, dans cette géométrie, c'est ce qui est vu comme vrai, ce qui est contrôlé par les instruments. Les modes de pensée s'exercent sur les objets matériels (exemple des dessins) ou matérialisés grâce à la perception et à l'expérience mécanique.

La géométrie II (GII) : elle est encore appelée géométrie axiomatique naturelle, car la réalité, le sensible subsiste. Ce paradigme géométrique s'est établi pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. Cependant, la simple vérification visuelle et l'évidence intuitive ne sont plus acceptées. On observe dans cette géométrie un effort d'abstraction dans la mesure où l'objet passe progressivement du dessin à la figure.

Lorsque l'élève interprète le dessin, il exerce ses modes de pensée et il utilise la perception visuelle. En fonction des informations retenues sur ces dessins, on peut le situer dans l'un des deux paradigmes ci-dessus.

Les travaux antérieurs en didactique de la géométrie montrent que les connaissances des élèves sur la figure géométrique ainsi que leur interprétation des dessins peuvent induire des difficultés au secondaire. On peut se demander si ces difficultés disparaissent au fur et à mesure que ces élèves évoluent dans leur scolarité. Les concepts-images des étudiants sur les figures ainsi que le paradigme dans lequel ils se situent en situation de construction d'une définition en géométrie demeurent peu connus. La question de recherche de cette étude s'énonce comme suit : en situation d'exécution de tâches, quels concepts-images sur la figure et ses dessins sont mobilisés par les élèves étudiants dans le processus de construction d'une définition de deux triangles congruents ? Dans quel paradigme se situent-ils ?

MÉTHODOLOGIE

Pour mettre en lumière les éléments du concept-image des étudiants sur la figure et ses dessins ainsi que les paradigmes géométriques dans lesquels ils se situent en situation de construction d'une définition de deux triangles congruents, nous avons mené une étude qualitative de type exploratoire.

Population et collecte des données

La population de cette étude est constituée de 60 étudiants des Classes Scientifiques Spéciales (CSS) de l'École Normale Supérieure (ENS) de Yaoundé. Il s'agit d'une structure qui prépare les jeunes bacheliers durant une année aux concours des grandes écoles scientifiques. Les participants à cette étude étaient tous volontaires. La géométrie euclidienne constitue près de 50 % des contenus de mathématiques enseignés au collège au Cameroun (âge des élèves de 11 à 15 ans). Nos participants ont eu à étudier les propriétés des figures et ont appris à interpréter les dessins en géométrie au collège.

Les données de cette étude sont des productions écrites des étudiants en réponse à un questionnaire et les enregistrements récoltées lors d'une expérimentation. Le questionnaire était constitué de trois exercices, pour cet article nous analysons les réponses d'un exercice. Cet exercice correspond à une activité de construction d'une définition en géométrie (De Villiers, 1998). Ce questionnaire a été passé en décembre 2021 pendant les heures de cours durant une période d'une heure. Nous avons recueilli les productions écrites des étudiants dans un premier temps et ensuite nous avons constitué 4 binômes dont nous avons enregistré les discussions. Les étudiants qui constituent les binômes étaient tous volontaires. Le choix de les faire travailler en binômes est dû au fait que nous souhaitions favoriser les échanges lors de l'exécution des tâches. D'après Pedemonte (2002), les discussions des élèves sont beaucoup plus riches en informations que leurs productions écrites. Ces discussions ont été transcrites pour les analyses. Dans cette étude, nous analysons les réponses des étudiants aux questions suivantes.

Les dessins de chaque figure[1] *ci-dessous représentent deux triangles congruents*

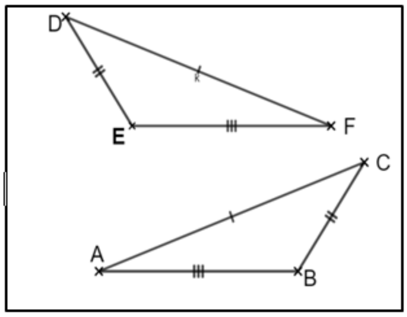


Figure 1

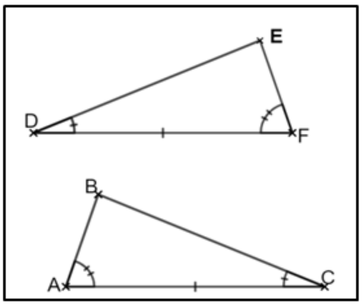


Figure 2

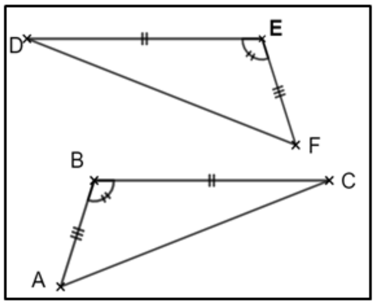


Figure 3

1. *Fais la liste des propriétés communes aux couples de triangles des figures ci-dessus.*
2. *Comment peux-tu expliquer le plus simplement possible ce que sont deux triangles congruents à quelqu'un qui ne le sait pas ?*

Analyse a priori des tâches

Les étudiants ont la responsabilité d'exécuter deux tâches. Elles conduisent à la construction d'une définition de la congruence de deux triangles. La première tâche consiste à lister les propriétés communes pour chaque couple de dessins. On peut s'attendre à ce que les étudiants se limitent aux interprétations des codes qui représentent les propriétés sur les dessins. Lorsque ces codes sont correctement interprétés, on peut supposer que ces étudiants expriment un concept-image cohérent sur les figures. Ces derniers savent identifier les informations pertinentes liées à la figure sur les dessins, on peut les situer en GII. En outre, leurs productions peuvent contenir des informations spatiales : les informations sur les formes des dessins (nous entendons par formes des dessins, leur orientation ainsi que leur taille) ; les longueurs des côtés et les mesures des angles. Des informations géométriquement signifiantes non représentées par des

[1] La figure ici est vue comme étant des couples de dessins (figure1 ; figure2 ; figure 3).

codes sont également attendues (les isométries des longueurs ou des angles). Deux modes de validation peuvent expliquer la présence de ces informations. D'une part, on peut s'attendre à ce que les étudiants procèdent par contrôle instrumenté ou par contrôle visuel sur les dessins ce qui permet de les situent en GI. D'autre part, on peut s'attendre également à ce que ceux-ci valident les propriétés d'isométries des longueurs non codées par déduction, dans lequel cas on peut les situer en GII.

La seconde tâche consiste à donner une description de deux triangles congruents. On s'attend à ce que ces participants énoncent leur concept-définition sur la congruence de deux triangles. Les définitions attendues sont celles qui établissent l'égalité entre les longueurs des côtés homologues et les mesures des angles homologues des deux triangles. Par ailleurs, on peut s'attendre à ce que les étudiants proposent une définition ambiguë (qui donne lieu à plusieurs interprétations) ou encore, une définition liée aux représentations (qui contient des informations spatiales : orientation, place dans la feuille, taille mesure de longueur…). On dira que ces étudiants ont un concept-image incohérent de la congruence de deux triangles.

RÉSULTATS

Pour chacune des questions du questionnaire, nous commençons par analyser les productions écrites des 60 participants. Ensuite, nous analysons les extraits des transcriptions des discussions de deux binômes d'étudiants.

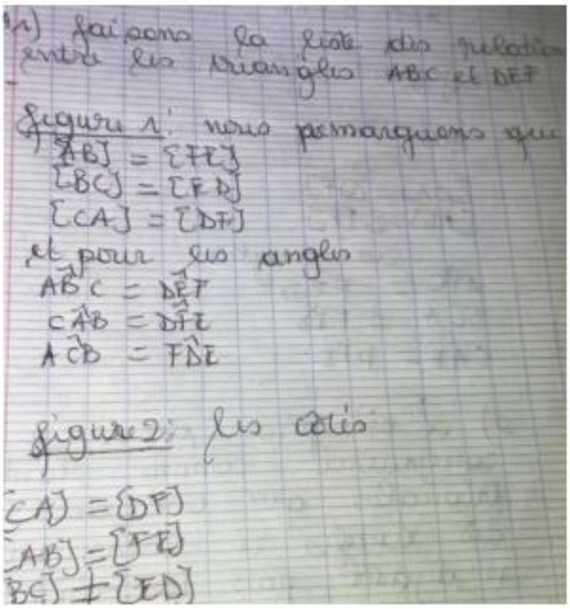
Interprétation des propriétés sur le dessin

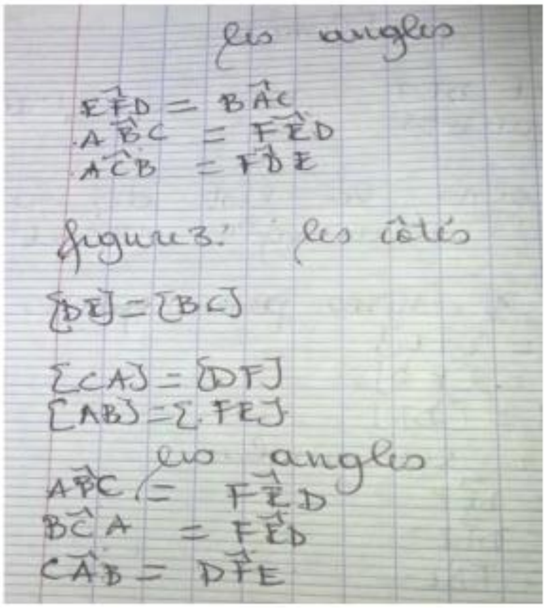
Les productions des étudiants ont été classées en catégories et regroupées dans le tableau qui suit. Ces étudiants ont effectué un travail d'interprétations des dessins et ont retenu des informations qui leur semblent pertinentes pour cette tâche.

Informations retenues par les étudiants	Pourcentage des étudiants
Isométrie des longueurs et des angles codée sur les dessins	23%
Forme des dessins : orientations et taille des dessins	8%
Position des dessins sur la feuille	8%
Isométrie des longueurs et des angles non codées sur les dessins	51%
Autres	13%

Tableau 1 : Informations évoquées par les étudiants sur les dessins des figures

Le tableau précédent permet de constater que 51% des étudiants ont évoqué des propriétés géométriquement signifiantes non codées sur les dessins (isométrie des longueurs et des angles). Par exemple, certains ont évoqué l'égalité des trois côtés homologues des triangles dans chacune des figures. Ces résultats correspondent à ceux attendus à l'analyse a priori. On peut supposer que certains de ces étudiants se sont situés en GI en procédant par contrôles visuel ou instrumenté pour valider les informations tandis que d'autre se sont situés en GII en procédant par déduction pour valider les informations.


1) faisons la liste des relation
entre les triangles ABC et DEF
figure 1 : nous remarquons que
[AB] = [FE]
[BC] = [FD]
[CA] = [DF]
et pour les angles
$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$
$\widehat{CAB} = \widehat{DFE}$
$\widehat{ACB} = \widehat{FDE}$
figure 2 : les côtés
[CA] = [DF]
[AB] = [FE]
[BC] ≠ [ED]


les angles
$\widehat{EFD} = \widehat{BAC}$
$\widehat{ABC} = \widehat{FED}$
$\widehat{ACB} = \widehat{FDE}$
figure 3 : les côtés
[DE] = [BC]
[CA] = [DF]
[AB] = [FE]
les angles
$\widehat{ABC} = \widehat{FED}$
$\widehat{BCA} = \widehat{FED}$
$\widehat{CAB} = \widehat{DFE}$

On note que 23% des étudiants se sont limités à l'interprétation des codes représentés sur les dessins. Ces derniers ont traduit correctement les codes sur les dessins. Toutefois, les productions des étudiants ont mis en lumière un manque de rigueur sur l'utilisation des symboles qui représentent les objets géométriques. Comme l'illustre l'exemple ci-dessus, on observe des confusions entre longueur et segment, entre mesure et angle. Dans la pratique, le codage d'un segment d'extrémité A et B se note [AB] et sa longueur se note AB, le codage de l'angle de sommet A et de côté [AB) et [AC) se note $\widehat{ABC}$ et sa mesure Mes $\widehat{ABC}$. La confusion entre ces codages peut rendre ambiguë la lecture des propriétés. 8% des étudiants ont évoqué des informations sur la forme des dessins, 8% ont évoqué les positions des dessins sur la feuille par exemple « les triangles sont côte à côte ». Ces résultats sont en droite ligne avec nos attentes de l'analyse a priori. Les propriétés sensorielles des figures semblent dominer les propriétés conceptuelles dans le concept-image des étudiants lorsqu'il s'agit d'interpréter les dessins. On peut supposer qu'au sortir du secondaire ces étudiants n'ont pas toujours un concept-image cohérent sur les objets géométriques étudiés. 13 % des étudiants ont proposé des réponses ambiguës que nous n'avons pas pu analyser.

CAS 1 : ANALYSE DES DISCUSSIONS DES ÉTUDIANTS « DA » ET « ED »

Les discussions des étudiants permettent de constater que ces derniers traduisent de façon abusive les propriétés visuelles des dessins. En effet, les informations évoquées ne sont pas associées aux propriétés géométriques de l'objet. L'extrait qui suit illustre les descriptions des étudiants.

ED : c'est quoi deux triangles congruents ? DA : deux triangles congruents sont deux triangles quelconque et en même temps isocèle où on retrouve deux côtés égaux. ED : lorsqu'on regarde, ça ne peut pas avoir deux côtés égaux parce que ça la forme deux triangles rectangles.	Pour ED, deux triangles congruents sont « quelconque et en même temps isocèle » ce qui est contradictoire. Pour ED, les triangles rectangles n'ont pas « deux côtés égaux », ce qui exclut les triangles rectangles isocèles de la classe des triangles rectangles. Ces affirmations expriment un concept-image incohérent sur les triangles. On observe que les étudiants procèdent par contrôle visuel pour comparer les longueurs des côtés.

Les étudiants utilisent un contrôle visuel pour comparer les longueurs des côtés et les mesures des angles sur les dessins. De plus, les côtés non codés sur les dessins des deux triangles ont également fait l'objet d'une comparaison. Les étudiants obtiennent donc certaines informations par vérification expérimentale. L'extrait des discussions des étudiants ci-dessous permet de l'illustrer.

ED : AB égal à FE, AC égal à DF et BC égal à EF. Dans la figure 1, l'angle A est égal à l'angle F ; DA [figure1] ici [angle en E] c'est 120 et 123 pour ceci [angle en B], regarde aussi. DA : mesure les angles des triangles dans la figure 2 ; on doit comparer tous les trois angles.	On observe que les étudiants évoquent une relation superflue dans la figure 1. Aucune information ne permet d'affirmer que les mesures des angles sont égales. On pourrait supposer qu'ils aient procédé par un contrôle visuel. Les mesures des angles qu'évoque l'un des étudiants ne sont pas données dans l'énoncé de la tâche.

Les productions écrites révèlent que pour chaque figure, les étudiants ont exprimé l'égalité entre les côtés homologues dans chaque couple de triangles. On observe également que ces derniers ont évoqué les relations d'égalité entre les angles homologues pour chaque couple de triangles représentés dans chacune des figures. On observe cependant des erreurs lorsque les étudiants expriment les relations entre les objets géométriques, en l'occurrence l'égalité entre les segments au lieu des longueurs des segments ou encore l'égalité entre les angles au lieu des mesures des angles. En se référant au système sémiotique enseigné au secondaire au Cameroun, on écrit l'égalité entre les distances et non entre les segments. Il en est de même pour les angles, on écrit l'égalité entre les mesures des angles et non entre les angles.

Les productions orales et écrites de ce binôme permettent de constater que les règles de traduction qui leur permettent de faire le lien entre la figure et ses dessins en géométrie ne sont pas cohérentes. On peut supposer que cela est dû à un concept-image incohérent sur les figures qu'ils manipulent. En particulier, il semble ne pas exister des liens cohérents entre les images mentales des étudiants sur la figure et ses propriétés. Le fait que les étudiants aient procédé par vérification expérimentale sur les dessins permet d'inférer que ces étudiants se situent en GI.

CAS 2 : ANALYSE DES DISCUSSIONS DES ÉTUDIANTS « AM » ET « KE ».

Dans leur discussion, les étudiants ont exprimé des difficultés dans la compréhension de la relation entre la figure et ses dessins. Parmi les propriétés retenues sur les dessins, ces étudiants ont évoqué les formes des dessins. En effet, les étudiants identifient la nature de certains triangles à partir de la forme des dessins. De plus, ceux-ci contrôlent visuellement la relation d'égalité entre les côtés d'un même triangle.

AM : le triangle DEF à deux côtés égaux ; KE : je t'écoute ; AM : l'autre triangle à un côté égal avec l'angle ; KE : c'est bizarre comment ? L'angle peut être égal avec le côté ? AM : c'est bizarre ; KE : on dit « faites la liste des relations entre les triangles ABC et EFD ci-dessous » ; AM : DEF a deux côtés égaux, figure 2 ; AM : hein oui c'est vrai, l'autre c'est un triangle isocèle ; KE : ABC est un triangle isocèle ; AM : Figure 2, le triangle EFD, l'angle est égal avec le côté parce qu'ils ont les mêmes codes ; Figure trois l'angle est égale avec un côté et l'autre est différent ;	AM évoque le fait que le triangle DEF a deux côtés égaux, ce qui fait de ce triangle un triangle isocèle. Cependant, aucun code sur les dessins ne permet de valider cette affirmation. On peut supposer que cela provient d'un contrôle visuel sur le dessin. Il évoque, chez l'étudiant, un exemple de triangle ayant deux côtés égaux contenus dans son image mentale. On constate qu'AM compare l'angle et le côté du triangle. C'est une erreur, car ces objets n'appartiennent pas à la même classe d'objets. Cela serait dû à une mauvaise interprétation des codes représentés sur le dessin. En effet, le même signe est utilisé pour coder le côté et l'angle du triangle.

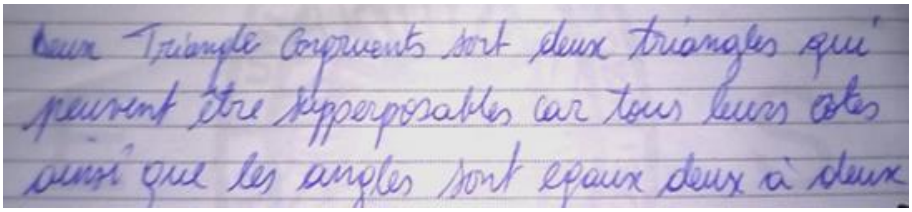
Parmi les propriétés proposées par les étudiants on retrouve des informations qui font référence à l'orientation spatiale des dessins. En effet, ces derniers décrivent la façon dont les dessins sont positionnés sur la feuille. L'extrait qui suit permet de l'illustrer.

AM : on va dire que les deux triangles ont les mêmes côtés et chacun... ; KE : on peut aussi dire qu'ils sont disposés de différente manière ; AM : et chacun d'eux a de différentes mesures ; KE : leurs côtés sont différents ; AM : les triangles là sont égaux non ?	On constate que la propriété évoquée par AM est ambiguë. Il pourrait s'agir des triangles confondus ou des triangles équilatéraux. La propriété évoquée par KE est une information spatiale qui n'est pas géométriquement signifiante. Les étudiants évoquent le fait que les côtés des triangles sont différents, on peut supposer qu'ils veulent parler des longueurs différentes.

On constate que les étudiants procèdent par contrôle visuel pour identifier les propriétés sur les différents dessins. Cela permet de les situer en GI. Les relations d'égalité entre les côtés d'un triangle sont contrôlées visuellement sur les dessins. Les dessins évoquent chez les étudiants des exemples de figures contenus dans leur image mentale qui leur sert de référence dans l'exécution des tâches. De plus, les informations spatiales font partie des éléments du concept-image des étudiants sur la figure manipulée. On peut également noter les difficultés d'interprétation des codes représentés sur les dessins. Ces phénomènes permettent de supposer que les règles de traduction qui permettent aux étudiants de connecter la figure à ses représentations dans leur concept-image n'ont pas atteint leur maturité.

Description de deux triangles congruents

Les étudiants ont proposé une caractérisation de deux triangles congruents. Ces derniers ont mobilisé les termes contenus dans leur concept-définition pour exprimer leur concept-image sur de deux triangles congruents. Les productions des élèves permettent de constater que 55 % des étudiants ont proposé des descriptions ambiguës de deux triangles congruents. Il s'agit de descriptions qui peuvent donner lieu à plusieurs interprétations.


Deux Triangle Congruents sont deux triangles qui peuvent être supperposables car tous leurs cotes ainsi que les angles sont egaux deux à deux

La description de ces étudiants n'est pas assez précise. En effet, la propriété « avoir les côtés égaux deux à deux » peut signifier qu'il s'agit uniquement de deux triangles équilatéraux. 38% des étudiants ont proposé des descriptions empiriques, car liées aux représentations de ces triangles (par exemple « *si l'un est le reflet de l'autre dans un miroir* »). Les productions de ces étudiants correspondent à ceux attendues à l'analyse a priori et permettent de les situer en GI. Pour ces derniers, les objets manipulés semblent être des objets du monde sensible. On note également que 5 % des étudiants ont évoqué le fait qu'il s'agit de deux triangles isométriques, ce qui est un synonyme de deux triangles congruents. Enfin, 5 % des étudiants ont évoqué des informations non pertinentes pour la tâche par exemple, l'hypoténuse des triangles. On peut noter que les dessins de la première question représentent des triangles quelconques et non des triangles rectangles. Une tentative d'explication à cela serait que ces étudiants n'ont pas un concept-image cohérent sur les figures manipulées. Le tableau qui suit indique le type de description produite par les étudiants.

Caractérisation de l'objet	Pourcentage des étudiants
Définition ambiguë	55 %
Définition empirique	38 %
Évocation des transformations	5 %
Autres propriétés	5 %

Tableau 2 : Différentes caractérisations données par des étudiants de deux triangles congruents

CAS 1

Les étudiants de ce binôme ont donné une description non conforme à celle qui peut être acceptée en géométrie au secondaire. Cette description est ambiguë. En effet, les propriétés évoquées par les étudiants peuvent donner lieu à plusieurs interprétations. Le tableau qui suit donne un extrait des discussions entre les deux étudiants.

ED : deux triangles congruents sont deux triangles ayant les mêmes côtés et les mêmes angles souvent codés de la même manière ;	Les propriétés contenues dans l'énoncé de cet étudiant peuvent donner lieu à plusieurs interprétations. On pourrait penser qu'il s'agit des triangles équilatéraux ou à deux triangles confondus.
ED : s'ils sont égaux, ça veut dire qu'ils sont complémentaires l'un de l'autre ; DA : explique-toi, complémentaire ? ED : je sais ce que je dis c'est-à-dire leurs angles sont complémentaires leurs côtés sont complémentaires ; ED : il s'agit de deux triangles ayant les mêmes côtés DA : quand tu dis ça, cela veut dire que tout ça est égal à tout ça ; c'est-à-dire tous les côtés se ressemblent ; cela veut dire que ce sont des triangles équilatéraux ;	On constate que les étudiants parlent de triangles complémentaires, ce qui n'a pas de sens en géométrie. Cependant, ils expliquent cette propriété en évoquant à nouveau les côtés complémentaires. Lorsque nous les avons interrogés à ce sujet, ils disent qu'il s'agit des triangles superposables et des côtés de même longueur. On constate également que les étudiants évoquent les côtés qui se ressemblent, cela laisse penser qu'il s'agit d'une constatation visuelle.

On constate à travers cet extrait que les étudiants rencontrent des difficultés à trouver des termes appropriés pour spécifier leur concept-image. Les descriptions qu'ils proposent sont ambiguës et liées aux représentations, elles ne concordent pas à celles qui peuvent être acceptées au secondaire. Elles traduisent un concept-image incohérent sur la congruence de deux triangles et permettent de situer ces étudiants en GI.

CAS 2

Les étudiants ont proposé un synonyme à deux triangles congruents, leur description intègre les propriétés spatiales des dessins ainsi que les formes des dessins. L'extrait qui suit en donne une illustration.

KE : on peut dire que deux triangles congruents, c'est deux triangles qui ont la même forme, mais de dispositions différentes. Non, c'est deux triangles qui ont différentes formes, mais de mêmes dispositions. AM : je pense plutôt que c'est deux triangles sont égaux, mais placés de différentes manières, parce que le sommet du triangle regarde par ici alors que le sommet du triangle là regarde par là. On va dire qu'il s'agit de deux triangles égaux, mais disposés de manière différente.	On constate que les étudiants parlent de triangles égaux, il s'agit d'un synonyme de triangles congruents. Les étudiants évoquent les propriétés telles que : « avoir la même forme » et « être disposé des différentes manières » qui n'ont pas de sens en géométrie axiomatique naturelle.

On constate que les descriptions des étudiants intègrent les propriétés qui proviennent des interprétations abusives des dessins. On observe également que les éléments de leur concept-image sur les figures manipulées ne sont pas cohérents. L'évocation des formes et des propriétés spatiales permet de situer les étudiants en géométrie naturelle.

Les productions des étudiants permettent d'inférer que leur concept-image de deux triangles congruents n'est pas suffisamment développé. Leurs définitions sont ambiguës et liées aux dessins. Les termes utilisés pour les décrire ne sont pas appropriés. Cela serait dû au fait que ces étudiants n'aient pas été associés aux processus de construction des définitions des figures géométriques au secondaire. De notre point de vue, développer les concepts-images des élèves sur les figures pourrait consister à donner une place importante aux activités de construction des définitions dans les pratiques enseignantes. Impliquer les élèves dans le processus de construction. Faire varier les dessins pour éviter l'émergence des phénomènes prototypes.

CONCLUSION ET DISCUSSIONS

L'objectif de cet article était de mettre en lumière les concept-image des étudiants sur la figure et ses dessins en situation de construction d'une définition de la congruence de deux triangles. Pour ce faire, nous avons passé un questionnaire et conduit une expérimentation au cours de laquelle les discussions des élèves ont été enregistrées et transcrites.

Les productions des étudiants font émerger des difficultés dans l'interprétation des propriétés des dessins. On observe que les étudiants font des interprétations abusives des dessins. Dans l'illustration de la page 4, les étudiants évoquent l'égalité des trois côtés homologues de chaque couple de triangles alors les codes représentés sur les dessins ne permettent pas de l'affirmer. Des propriétés spatiales sont évoquées, comme on peut le voir dans les discussions de « KE » et « AM » à la première question : « on peut aussi dire qu'ils sont disposés de différentes manières ». Ces résultats permettent de situer ces étudiants en GI. On peut supposer que leur concept-image sur les figures n'est pas suffisamment développé. Ces résultats convergents avec ceux de Coppé, Dorier, & Moreau (2005), Laborde (1994) et Walter (2001) qui ont également observé que certaines difficultés des élèves en géométrie proviennent de l'utilisation des informations visuelles qui parfois n'ont pas de sens en géométrie. Les formes des dessins font également partie des informations du dessin évoquées par les étudiants. Ce fait pourrait indiquer que ces derniers ont mobilisé leur image mentale sur les triangles. Cette observation concorde avec celle de Noirfaliste (1991) qui a remarqué que les élèves se réfèrent à leur image mentale pour exécuter des tâches en géométrie. Ces images mentales sont à l'origine des difficultés que rencontrent les élèves pour définir les figures géométriques (Tchonang & al. 2019). Ces résultats renforcent ceux de Vodušek et Lipovec (2014) qui ont constaté que les enseignants en formation mobilisaient leur image mentale du carré au détriment des propriétés en situation de résolution de problème. On peut dire que ces étudiants n'ont pas achevé leur transition vers la GII. En particulier, ces derniers éprouvent des difficultés à connecter les propriétés conceptuelles de la figure à ses propriétés sensorielles en situation de résolution de problème.

Les résultats de cette étude montrent que l'évolution dans la scolarité n'améliore pas toujours l'interprétation des dessins et ne permet pas toujours à l'élève de construire un concept-image cohérent sur la figure en géométrie. Ces résultats rejoignent ceux de Fischbein et Nachlieli (1998) qui démontrent que l'avancement dans la scolarité n'améliore pas le contrôle des composantes conceptuelles sur l'interprétation des dessins contrairement à ce que l'on pourrait penser.

Enfin, cette étude présente toutefois des limites. Tout d'abord, les résultats ne peuvent être généralisés en raison du faible nombre de participants. Ensuite, on pourrait réduire la part de subjectivité des résultats en menant des entretiens avec les participants pour qu'ils expliquent leur choix. Des études futures consisteraient à explorer les pratiques enseignantes en lien avec la figure et ses dessins. Elles porteraient sur des observations en salle de classe et des questionnaires pour enseignants. Ces études permettraient d'une part de faire le lien entre les concepts-images des élèves et les pratiques enseignantes, d'autre part, de dégager des stratégies pour développer les concepts-images des élèves sur les figures géométriques.

BIBLIOGRAPHIE

Coppé, S., Dorier, J.-L., & Moreau, V. (2005). Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5ème. *Petit x*, 68, 8–37.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the Twentysecond International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *2*(July), 248–255.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence. *Anale de Didactique et Des Sciences Cognitives*, *1*, 57–74. Retrieved from IREM de Strasbourg

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193–1211. https://doi.org/10.1080/0950069980201003

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 175–193.

Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie : Permanence et révolution. *Bulletin APMEP*, *2*, 523–548.

Noirfalise, R. (1991). Figures prégnantes en géométrie. *Repères-IREM*, *2*, 51–58.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(1), 79–92. https://doi.org/10.1007/BF00428386

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Tchonang, P. (2021). Student Comprehension of The Concept of a Geometrical Figure : The Case of Straight Lines and Parallel Line. *Journal of Mathematics Education*, *6*(2), 149–158. https://doi.org/http://doi.org/10.31327/jme.v6i2.1408

Tchonang, P., Njomgang, J., Tieudjo, D., & Nchian, L. (2019). Influence of Drawing and Figures on Secondary School Students' Argumentation and Proof: An investigation on Parallelogram. *Acta Didactica Napocensia*. https://doi.org/10.24193/adn.12.2.10

Tchonang, P., Njomgang, J., Tieudjo, D., & Pedemonte, B. (2020). The Introduction of Proof at the Secondary School in Cameroun: A First Approach trough the Study of Quadrilaterals and Triangles in the Textbook. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3), em0599. https://doi.org/10.29333/iejme/8404

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 65–81.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* ,177–184.

Vodušek, H. B., & Lipovec, A. (2014). The square as a figural concept. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *28*(48), 430–448. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a21
Walter, A. (2001). Quelle géométrie pour l'enseignement en collège? *Petit x*, *54*, 31–49.