MIEUX FAIRE APPRENDRE TOUS LES ELEVES EN PRENANT EN CHARGE DES OBJETS TRANSPARENTS ET DES ENJEUX LANGAGIERS : UN EXEMPLE AVEC LA NOTION DE DISTANCE, EN LIEN AVEC LE CONCEPT DE CERCLE

Aurélie Chesnais, Aurélien Destribats, Julie Lefort, Nazha Lahmouche et Maëlis Béjaud

Institut de Recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de l'Université de Montpellier, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Education et Formation, Université de Montpellier et Université Paul Valéry de Montpellier.

Certaines difficultés d'apprentissage résultent d'une insuffisante prise en charge, par l'enseignement, de certains objets de savoirs, et notamment ceux liés au langage. Nous présentons des outils conceptuels issus de la recherche pour penser ces enjeux, puis les résultats d'une expérimentation menée dans le cadre d'un travail collaboratif entre enseignant·es et chercheures en didactique des mathématiques qui montrent des effets d'amélioration des apprentissages d'élèves, y compris pour des élèves en difficultés.

Mots clés : différenciation passive, distance, langage verbal, cercle

INTRODUCTION

Commençons par rappeler ce qu'écrivait Brousseau, à propos de la difficulté scolaire :

> Mettre en cause l'élève, uniquement l'élève, me paraît une attitude analogue (aussi vaine) que celle qui chercherait à expliquer pourquoi l'eau fuit d'un seau percé en analysant les différences de qualité entre l'eau qui est sortie et celle qui est restée, comme si les raisons de la fuite résidaient dans des qualités propres à l'eau. (Brousseau, 1980, p. 181).

Les travaux de Bourdieu et Passeron (1964) ont par ailleurs mis en évidence que les inégalités scolaires résultaient largement d'une forme d'« indifférence aux différences », c'est-à-dire du fait que l'école ne tient pas suffisamment compte des caractéristiques des élèves auxquels elle s'adresse.

Si ces deux points de vue peuvent paraître contradictoires au premier abord, ils se rejoignent en réalité dans la nécessité d'interroger le fonctionnement du système et sa part de responsabilité dans les difficultés d'apprentissages éprouvées par certains élèves. Noirfalise (1994) ajoute d'ailleurs à la citation de Brousseau que ce ne sont en effet pas les caractéristiques propres qui distinguent les molécules d'eau qui sont sorties du seau de celles qui y sont restées, mais leur « position dans le système ».

Il s'agit alors non pas tant de penser un traitement des difficultés scolaires comme nécessitant que le système s'adapte aux élèves qui rencontrent des difficultés, qu'un fonctionnement du système qui soit davantage favorable aux apprentissages de tous. Cela amène à tenter de repérer certains aspects de l'enseignement qui conditionnent l'apprentissage à des ressources – notamment langagières (Lahire, 1993, Bautier, 2007) – dont tous les élèves ne disposent pas, et en ne prenant pas suffisamment en charge certains enjeux de savoirs, que les chercheur·es qualifient alors de « transparents » (Margolinas & Laparra, 2011, Chesnais, 2018).

Nous présentons dans cet article le travail que nous avons mené en France au sein d'un groupe[1] réunissant des enseignant·es et des chercheur·es depuis plusieurs années sur la notion mathématique de « distance », apparue comme un objet d'apprentissage et d'enseignement problématique à l'issue d'un premier travail sur la notion de repérage (Cerclé et al., 2021).

Tout d'abord, nous revenons sur certains travaux sur les inégalités scolaires qui peuvent permettre d'étudier les phénomènes de difficultés scolaires. Dans une deuxième partie, nous présentons une analyse de la notion de distance visant à préciser les enjeux de savoirs associés. Nous présentons enfin les résultats d'une expérimentation qui a été menée dans plusieurs classes et qui visait à mieux prendre en charge ces enjeux, ainsi que des exemples de résultats qu'elle a produits.

UN ARRIÈRE-PLAN SOCIOLOGIQUE ET DIDACTIQUE

Les travaux menés par des sociologues et des didacticien·nes de plusieurs disciplines au sein du réseau RESEIDA[2] amènent à considérer que les inégalités scolaires résultent d'une confrontation entre, d'une part, les caractéristiques des élèves qui sont inégalement outillés du point de vue de leur rapport au savoir et au langage (notamment en fonction de leur milieu familial) pour l'accès aux savoirs scolaires et, d'autre part, ce que requiert l'école et la manière dont elle le requiert. C'est ce que certains chercheurs nomment l' « hypothèse relationnelle » (Bautier & Goigoux, 2004, Rochex & Crinon, 2011).

En particulier, une part importante des difficultés d'apprentissages rencontrées par certains élèves résultent ainsi de formes de « différenciation passive », du fait que l'école exige de tous les élèves certains savoirs, compétences et modes de faire, sans prendre réellement en charge leur enseignement. Pour le dire de façon un peu lapidaire, ce que propose l'école ne permet qu'à certains élèves d'apprendre, cette possibilité dépendant de leurs propres ressources, construites dans leur milieu familial. A ces phénomènes peut également s'ajouter le fait que certaines formes de « différenciation active », qui consiste cette fois à différencier ce que l'école propose aux élèves en fonction de leurs caractéristiques – réelles ou supposées – peuvent ne pas suffire, voire parfois aggraver les inégalités d'apprentissage en conduisant à ce que les élèves fréquentent des « univers de savoirs différenciés », « inégalement productifs en termes d'activité intellectuelle et d'apprentissages potentiels » (Rochex & Crinon, 2011, p. 91-92).

Ces phénomènes se produisent largement à l'insu des acteurs, et en particulier des enseignant·es. Cela a conduit des didacticien·nes à les relier au caractère « transparent » ou « invisible » de certains savoirs, compétences ou modes de faire en jeu (Margolinas & Laparra, 2011, Chesnais, 2018). Sans rentrer dans le détail des débats au sein des chercheurs sur ces notions, nous nous appuyons sur cette idée que, si certaines choses ne sont pas prises en charge suffisamment explicitement, de manière raisonnée et systématique par les enseignant·es, le fait que les élèves réalisent les apprentissages associés va dépendre en partie de leurs propres ressources. Chesnais (2018) a ainsi par exemple étudié la mise en œuvre d'une même situation proposée par le même enseignant dans deux classes de 6ème, dont l'une est située en éducation prioritaire et l'autre en milieu ordinaire. L'analyse montre que, dans la classe ordinaire, c'est l'apport de certaines connaissances dans la séance par des élèves qui permet à la grande majorité des élèves de la classe de développer une activité porteuse des apprentissages visés par la situation. Dans la classe d'éducation prioritaire, l'absence d'explicitation de certaines connaissances et de certaines « mises en fonctionnement des connaissances » (Robert, 2008), à l'insu manifeste de l'enseignant, aboutit au fait qu'aucun élève n'est

[1] Il s'agit du groupe Didactique de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Montpellier, piloté par Aurélie Chesnais (didacticienne des mathématiques) et qui réunit : une dizaine d'enseignants de collège ou de lycée, dont certains exercent en éducation prioritaire, et dont certains sont également formateurs, une chercheuse en mathématiques (Louise Nyssen), et une autre didacticienne des mathématiques (Céline Constantin).

[2] REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages. Ce réseau regroupe autour de l'équipe ESCOL-CIRCEFT de l'Université Paris 8 des chercheurs de différentes disciplines (sciences de l'éducation, didactiques, sociologie, psychologie) s'intéressant aux inégalités scolaires.

en mesure de s'engager réellement dans la tâche, dont la résolution est finalement prise en charge par le professeur ; l'activité des élèves est alors très réduite, au point qu'on peut supposer qu'elle ne permet pas à la plupart d'entre eux de construire les apprentissages visés.

Un élément identifié comme particulièrement transparent dans les classes est le rôle que jouent certaines compétences langagières. Cela joue alors un rôle particulièrement différenciateur dans les apprentissages puisque, précisément, les élèves sont inégalement outillés de ce point de vue selon leur milieu socioculturel (Lahire, 1993, Bautier, 2007). Bautier pointe que ces compétences langagières relèvent de la maîtrise du lexique et de la syntaxe, mais qu'au-delà de ces difficultés liées aux « formes linguistiques », existent aussi des enjeux liés aux « usages du langage », c'est-à-dire ce à quoi sert le langage. En l'occurrence, le langage en classe sert à bien autre chose (outil d'élaboration de la pensée, de formulation de savoirs etc.) que ce à quoi il sert dans le quotidien où il est souvent lié à une action dans l'immédiateté du dire et du faire, la subjectivité, et en lien avec l'expression des affects (Bautier, 2007). En mathématiques, les deux types d'enjeux (formes linguistiques et usages du langage) sont à prendre en considération, d'autant plus que le langage (en particulier le langage verbal, oral comme écrit) paraît victime d'une « illusion de transparence » aux acteurs (Rebière, 2013 ; Chesnais & Coulange, 2022). Par exemple, une étude exploratoire, présentée dans Auger et Chesnais (2021) laisse à penser que les enjeux liés à la maîtrise de différentes significations de la préposition « de » en mathématiques (par exemple dans l'expression « cercle de centre O ») sont peu pris en charge dans les classes et ne sont pas maîtrisées par les élèves à l'entrée dans le secondaire, contrairement à ce que l'on pourrait penser, alors même que cette préposition est le mot le plus fréquent dans les énoncés de mathématiques (Laborde, 1982).

Certain·es chercheur·es proposent alors d'appréhender le processus d'évolution des discours accompagnant le processus d'apprentissage comme une « secondarisation des discours », c'est-à-dire une évolution de productions langagières « de genre premier » (liées à une appréhension première des objets, en appui souvent sur une conception quotidienne de ces objets), vers des productions langagières « de genre second », davantage en adéquation avec la conception scientifique de l'objet visé et plus conformes aux usages experts (Jaubert, Rebière & Bernié, 2012 ; Rebière, 2013 ; Chesnais & Coulange, 2022). L'hypothèse essentielle est que l'évolution des discours fait partie intégrante du processus d'apprentissage : l'enrichissement des moyens langagiers accompagne (au sens où cela se fait de façon dialectique) l'évolution des capacités à résoudre des tâches impliquant la notion visée (i. e. l'enrichissement des classes de situation et des invariants opératoires, en suivant l'idée de l'apprentissage comme « conceptualisation » au sens de Vergnaud, 1990).

QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE DES SAVOIRS EN JEU

Nos travaux précédents nous ont amenés à identifier que la construction des savoirs liés au repérage (notion d'abscisse, droite graduée, coordonnées etc.) est très peu prise en charge dans les programmes et dans les classes malgré le caractère crucial de ces notions (Cerclé et al., 2020). Nous nous sommes alors intéressés plus précisément à la construction de la notion de *distance* au début du collège.

Cette notion joue un rôle essentiel en mathématiques, dans la géométrie d'Euclide où elle est notamment au fondement de la définition d'un cercle, mais aussi dans la géométrie analytique. Elle permet en effet l'articulation des cadres numérique et géométrique constituante de la géométrie analytique, via la définition de l'abscisse d'un point sur une droite graduée comme distance du point à l'origine (ou l'opposé de cette distance). Sans entrer dans les détails de la complexité mathématique de la notion de distance[3], pointons juste qu'il s'agit, sur le plan logique, d'une *relation* entre des parties du plan (entre deux points, d'un point à une droite ou d'un point à une courbe etc.). Chevallard et Johsua (1986) l'ont choisie pour exemplifier le processus de transposition didactique et pointent notamment des difficultés dans le processus liées au fait

[3] Le lecteur intéressé pourra trouver des compléments dans Cerclé et Nyssen (2016) ou dans Cerclé et al. (2021).

que la notion renvoie à la fois à une acception quotidienne, à une notion « intuitive » liée à la distance « physique » dans la géométrie d'Euclide, et à une notion issue du développement de l'analyse et des travaux sur les espaces à n dimensions en mathématiques ; le rapport entre ces trois aspects est différent suivant les versions des programmes et a notamment été largement bouleversé par la réforme dite « des mathématiques modernes ».

Pour ce qui concerne les programmes français actuels, il s'agit explicitement d'« établir la notion de distance entre deux points, entre un point et une droite » en classe de 6ème (première année du secondaire inférieur, élèves de 11 ans), mais elle apparaît déjà dans les « attendus de fin d'année » des classes inférieures, notamment dans la définition du « cercle (comme ensemble des points à distance donnée d'un point donné) » (attendus de fin de CM1, avant-dernier niveau du primaire). Une rapide étude des manuels et des travaux sur le cercle à l'école élémentaire (Bulf & Céli, 2016 ; Mathé, Maillot & Ribennes, 2022) montre toutefois que l'enseignement de cette notion à l'école élémentaire s'appuie essentiellement sur une conception intuitive de la distance (issue du quotidien) et que le travail de formalisation mathématique de la distance relève bien du début du collège, notamment parce qu'elle implique la notion de points (Chesnais et Mathé, 2016). Le travail sur la définition du cercle en lien avec la distance est donc encore un enjeu en 6ème (contrairement à d'autres conceptions du cercle, au sens d'Artigue et Robinet (1982) qui sont acquises à la fin de l'élémentaire) en lien avec la notion de distance entre deux points et avec des enjeux langagiers importants, point sur lequel nous rejoignons les travaux de Baudart (2011) en éducation prioritaire et Bulf et al. (2021). Notons toutefois que les considérations de ces auteurs concernant le langage portent davantage sur les *usages* du langage (notamment dans le cadre de l'institutionnalisation) que sur les formes linguistiques des énoncés mathématiques, que nous avons choisi de considérer plus spécifiquement.

Pour identifier des enjeux d'apprentissages liés à la notion de distance, nous nous appuyons sur une « analyse logique » du concept et du langage associé[4] (Vergnaud 1990, 1991 ; Barrier et al, 2019). La complexité de la notion de distance, au début du collège, tient en partie au fait qu'il s'agit d'une relation, du point de vue de la logique d'une part, d'autre part au fait qu'elle porte sur des points, c'est-à-dire des objets de dimension 0. La définition de la distance entre deux points comme « longueur du segment joignant ces deux points » suppose ainsi d'articuler une relation entre objets de dimension 0 et une propriété d'un objet de dimension 1[5]. Rappelons que la question du rapport entre les points et les lignes est encore largement à travailler au collège et ne peut aboutir complètement qu'au lycée (Chesnais & Mathé, 2016 ; Cerclé et al., 2021). Par ailleurs, les formulations associées vont nécessiter – précisément du fait qu'il s'agit d'une relation – des constructions syntaxiques relativement complexes : on parle de « distance *du* point A *au* point B », « distance *d'*un point A *à* une droite d », ou encore « distance *entre* les points A *et* B ». Comme le font remarquer Chevallard et Johsua (1986), ces difficultés sont écartées par les mathématiciens, dans le cas de la distance entre deux points, grâce à l'usage de la notation AB, mais le mot « distance » reste nécessaire dans les autres cas, en tous les cas au niveau scolaire.

Ces enjeux sont d'autant plus vifs que dans les activités mathématiques dès l'école primaire (cf. supra), on va rapidement s'intéresser à des égalités de distances, ce qui, du point de vue logique, suppose de s'intéresser à des relations entre des relations, ou, pour le dire autrement, à des relations à 4 places, qui sont particulièrement complexes (Vergnaud, 1990) et qui nécessitent, pour être manipulés, des moyens langagiers très élaborés.

Ainsi, identifier que des points A et B appartiennent à un même cercle de centre O suppose d'identifier que « la distance entre A et O est égale à la distance entre B et O », ou encore que « A est à la même distance de O que B » ou bien « O est à la même distance de A que de B ». Nous invitons le lecteur à noter

---

[4] Il s'agit d'analyser un concept en s'intéressant à sa nature logique (propriété ou relation) et au nombre d'arguments impliqués lorsqu'il s'agit d'une relation, ainsi qu'à sa prise en charge dans le langage, verbal ou symbolique.

[5] Duval (2005) pointe le caractère fondamental de la « déconstruction dimensionnelle des formes », c'est-à-dire la capacité à visualiser des figures comme étant constituées d'objets de différentes dimensions.

que ces deux dernières phrases (très économiques car très synthétiques) se ressemblent fortement et ont la même signification, alors même que les points O et A ne sont pas mentionnés à la même place : ce qui permet qu'elles aient la même signification est la différence subtile qui consiste à avoir ajouté « de » entre « que » et « B ».

Dans le cas de la médiatrice d'un segment [AB], on pourra ainsi dire qu'un point M lui appartient s'il est à la même distance de A que de B. Si N est un autre point de la médiatrice, on pourrait être tenté de dire que M et N sont à la même distance de A et de B, mais cette phrase pourrait porter à confusion car elle signifie MA=MB et NA=NB et non MA=NA et MB = NB !

L' « expert » en mathématique maîtrise ces subtilités sans même en être conscient, elles sont tout à fait « naturalisées » pour lui (Barrier & Durand-Guerrier, 2016). Il est capable de comprendre et de produire des énoncés corrects et nécessaires à la résolution d'un problème ou la formulation d'une propriété, ainsi que de convertir[6] du registre du langage verbal (oral et/ou écrit) au langage symbolique, et inversement. Cela représente des enjeux d'apprentissage dont on peut soupçonner que, s'ils ne sont pas correctement pris en charge, ils pourraient poser des difficultés, au moins à certains élèves. Or nos travaux précédents nous ont permis d'identifier que la notion de distance est largement transparente au début du collège, au sens où elle ne semble pas être prise en charge de façon très explicite (et encore moins, les enjeux langagiers associés, au-delà de l'introduction de la notation). Une rapide analyse de manuels montre par exemple qu'elle est manifestement considérée comme étant déjà maîtrisée à l'entrée au collège (Cerclé et al., 2021).

UNE TENTATIVE POUR PRENDRE EN CHARGE PLUS EXPLICITEMENT CES ENJEUX DANS LES CLASSES

Une expérimentation

Ces analyses nous ont amenés à tenter de penser des situations de classes permettant de prendre davantage en charge l'enseignement de la notion de distance, en particulier préalablement au travail sur le cercle, en 6ème. Les situations élaborées intègrent par ailleurs une attention particulière au rôle du langage (à la fois du point de vue des formes linguistiques et des usages du langage) dans le processus d'apprentissage, notamment en intégrant dans nos tâches et leur mise en œuvre la question de la secondarisation des discours.

Nous ne rendons pas compte de l'ensemble de ce qui a été travaillé dans les classes, d'autant plus que cela a pu être un peu différent selon les classes, mais seulement de quelques éléments qui nous semblent avoir joué un rôle crucial ou qui exemplifient bien le type de travail qui a été mené. Trois enseignant·es expérimenté·es (plus de cinq années d'expérience) ont été impliqué·es dans ces expérimentations. Deux d'entre eux exercent dans un établissement situé dans un réseau d'éducation prioritaire renforcé[7], l'une a travaillé avec deux classes de 6ème, l'autre avec deux classes de 5ème. La dernière a travaillé avec deux classes de 6ème, dans un établissement accueillant un public favorisé socialement.

Des tâches ou des questions dans certaines tâches ont été pensées pour faire produire du langage (en particulier à l'écrit) par les élèves individuellement, notamment produire des énoncés mathématiques (des exemples sont présentés dans Cerclé et al., à paraître), et une large place a été faite également à des discussions à l'oral, entre élèves ou dans des phases collectives pilotées par l'enseignant·e (phases de mise en commun après un temps de recherche individuelle par exemple, où il s'agissait de formuler et/ou de

---

[6] Nous parlons ici de « conversion » au sens de Duval (1993) qu'il définit comme la transformation d'une représentation à partir d'un registre de représentation sémiotique dans un autre.

[7] En France, les réseaux d'éducation prioritaires renforcés, aussi appelés REP+, sont des réseaux d'établissements (en général, un collège et les écoles du même secteur), accueillant une proportion importante d'élèves de milieu social défavorisé.

justifier une procédure employée pour répondre à une tâche). Nous avons recueilli les productions écrites des élèves dans les six classes.

Par ailleurs, nous avons élaboré des prétests et des posttests (avec des exercices similaires et des exercices différents), qui ont été réalisés dans les six classes expérimentales. Les posttests ont également été proposés dans neuf classes jouant le rôle de « classes témoins » car elles sont dans les mêmes établissements ou des établissements à profil similaire que les classes expérimentales, mais leurs enseignant·es n'ont pas participé au groupe et ont développé leur propre enseignement de géométrie (incluant un chapitre sur le cercle et la notion de distance, conformément aux programmes). Quatre classes expérimentales et quatre classes témoins sont en éducation prioritaire (nous les noterons EP) ; les autres classes sont situées en milieu ordinaire, voire dans des établissements favorisés (nous les noterons O).

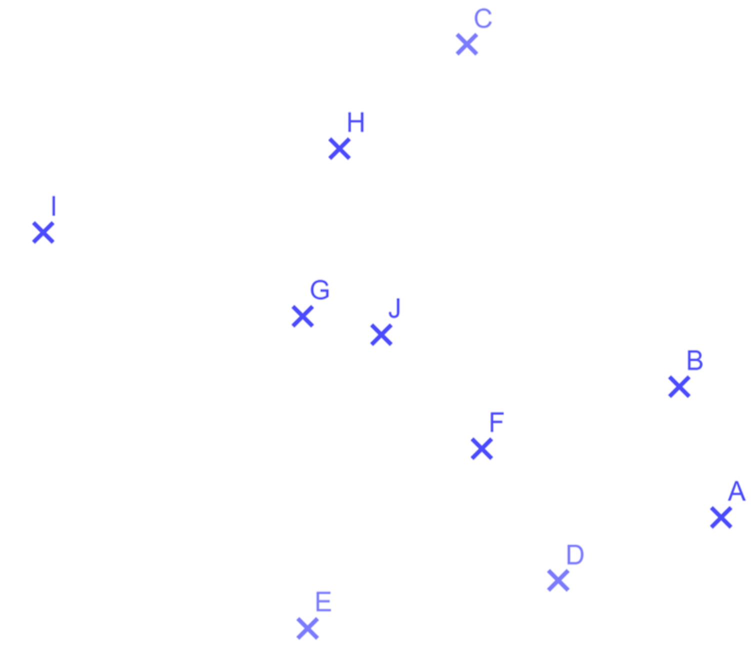
Nous proposons, comme exemples de résultats, la comparaison des réponses des élèves pour un exercice du posttest (la comparaison entre réponses aux prétests et posttests nécessite des développements que nous ne pouvons présenter ici faute de place).

Analyse *a priori* d'un exercice du posttest

L'exercice 3 du posttest est inspiré d'un exercice issu des évaluations à l'entrée en 6$^{\text{ème}}$ proposé aux élèves en 1999, 2000 et 2004. Cet exercice a par ailleurs été utilisé par Offre et al. (2006) pour étudier la maîtrise que les élèves avaient des instruments de géométrie, en particulier du contrôle de leur usage par des propriétés des figures, en fin d'école élémentaire. Il n'a pas été proposé en prétest.

La tâche consiste à retrouver le centre d'un cercle dans un nuage de points (marqués par une croix et nommés), dont 4 sont annoncés comme appartenant au cercle. La consigne demande aux élèves d'utiliser uniquement la règle graduée. Le nuage a été légèrement modifié (voir la version originale en annexe) pour rendre moins évidente l'identification visuelle du cercle et du centre. Il a par ailleurs été demandé aux élèves de justifier leur réponse. L'énoncé est proposé en Figure 1.

<u>Exercice 3 :</u>



Dans le nuage de points ci-dessus, les points B, C, D et E sont situés sur un même cercle.

Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.

En utilisant ta **<u>règle graduée</u>**, trouve le centre de ce cercle puis réponds aux questions.

1. Explique pourquoi tu penses que le point que tu as trouvé est bien le centre du cercle.

Fig. 1 : Enoncé de l'exercice 3 du posttest, question 1

La procédure attendue est d'identifier visuellement que le centre ne peut être que J ou G puis de mesurer la distance entre J et chacun des points C, B, D et E et de conclure, en ayant éventuellement préalablement mesuré les distances entre G et au moins deux des points C, B, D et E et constaté au moins une inégalité. On pourrait imaginer un traitement plus systématique des points (H, G, J, F, voire I), en effectuant des mesures pour conclure que le point ne peut pas être le centre cherché, dès que deux distances (aux points B, C, D ou E) sont différentes. Notons que le fait qu'un seul des points convienne repose sur l'unicité d'un cercle défini par au moins trois points distincts et l'unicité du rayon, qui sont deux connaissances transparentes pour les élèves (toutefois, c'est ce qui permet éventuellement de trouver le point par élimination). Nous considérons ici que la question ne se pose pas car la formulation de l'énoncé (« le centre de ce cercle ») assure l'existence (dans l'ensemble des points identifiés et nommés sur le dessin) et l'unicité du point recherché.

Cette procédure repose sur un raisonnement qui mobilise l'équivalence, pour un point, entre le fait d'appartenir à un cercle de centre et de rayon-longueur[8] donné, et le fait d'être situé à une distance du centre égale au rayon-longueur. Considérer la distance entre des points peut supposer, pour un élève de 6ème, d'introduire le pas déductif qui consiste à se ramener à la longueur du segment qui joint ces deux points (par exemple, pour pouvoir dire que les points C et B sont à la même distance de J, certains élèves pourraient avoir besoin de tracer les segments [CJ] et [BJ] pour les mesurer). Un autre type de raisonnement est possible, portant uniquement sur les longueurs de segments, sans mobiliser des distances entre des points : il s'appuie sur l'idée de rayon-segment et la propriété d'équivalence entre le fait qu'un segment dont une extrémité est le centre d'un cercle soit de longueur égale au rayon-longueur du cercle et le fait que son autre extrémité appartienne au cercle[9].

Utiliser la procédure attendue en mobilisant (plus ou moins explicitement) l'un ou l'autre de ces types de raisonnements recèle plusieurs difficultés pour les élèves, notamment liée à la question de « la reconnaissance de la pertinence de l'instrument » règle graduée pour travailler sur un cercle (Offre et al., 2006). La validation de l'égalité des longueurs ou des distances repose en effet sur l'utilisation de la règle graduée, c'est-à-dire sur une validation instrumentée, et sur la mesure[10]. Cette association de la règle graduée au cercle peut être déstabilisante pour un élève qui n'a qu'une conception globale du cercle, par exemple comme ligne que l'on peut tracer au compas, comme le mentionnait déjà le document d'aide à l'évaluation adressé aux enseignant·es par le ministère et comme l'analysent également Offre et al. (2006), en appui sur les travaux d'Artigue et Robinet (1982) sur les conceptions du cercle. Le fait d'utiliser la procédure attendue témoigne donc d'une disponibilité de la conception du cercle en lien avec l'équidistance de points à un point donné ainsi que de la capacité à décoder le dessin et à utiliser les instruments correctement (Offre et al., ibid.).

Notons que les statistiques présentées par le ministère à l'époque montrent que les élèves échouaient massivement à cet exercice, alors même que, comme dans les programmes actuels, cette définition était supposée travaillée en fin d'école élémentaire : par exemple, en 2004, si plus des trois quarts des élèves identifiaient le bon point, seuls 35 % utilisaient la procédure attendue et plus d'un quart des élèves utilisaient le compas.

---

[8] Nous adoptons dans ce texte la proposition de Mathé et al. (2022) de désigner par « rayon-segment » l'usage du mot rayon qui renvoie au segment joignant un point du cercle à son centre et « rayon-longueur » l'usage du mot qui renvoie à la longueur commune à ces rayons. Nous lui adjoignons « rayon-mesure » lorsque le mot renvoie à la mesure, dans une unité donnée, du rayon-longueur.

[9] Nous donnons d'autres exemples de tâches dans lesquelles ces deux types de raisonnements sont présents et mènent à des réponses correctes, ainsi que des exemples de productions d'élèves associées dans Cerclé et al. (2022).

[10] On aurait pu imaginer d'autres procédures, par exemple avec une ficelle, mais la consigne impose l'utilisation de la règle graduée (nous avons repris ici une caractéristique de la tâche initiale).

Quant à la formulation de la justification, elle suppose *a minima* de mentionner soit l'égalité des quatre longueurs de segments, soit l'égalité des quatre distances entre J et chacun des points B, C, D et E. Si le raisonnement est mené sur les distances entre les points, il s'agit donc de formuler une relation (d'égalité) entre quatre[11] relations (de distance, chacune entre deux points). La formulation experte repose sur l'utilisation des notations mathématiques : JB=JC=JD=JE, dont on peut noter qu'elle peut tout autant renvoyer à l'égalité des longueurs des segments que celle des distances et qu'elle nécessite de mobiliser la transitivité de l'égalité pour conclure. La formulation verbale est en revanche particulièrement complexe. La plus élémentaire est très coûteuse et peu acceptable à l'écrit : « la distance entre le point J et le point B est égale à la distance entre le point J et le point C et à la distance entre … ». Une formulation acceptable suppose d'utiliser des formes contractées, plus élaborées syntaxiquement, comme « le point J est à la même distance des quatre points B, C, D et E » (ou l'inverse), mais qui imbrique les différentes relations d'une manière particulièrement complexe : il est difficile d'y identifier les éléments qui sont égaux entre eux, et même des couples de points dont on évoque la distance.

Il n'est bien entendu pas attendu des élèves, en particulier en 6ème, qu'ils verbalisent complètement ce raisonnement. En particulier, il n'est pas attendu qu'ils mentionnent la définition du cercle. Toutefois, la justification demandée doit permettre d'identifier dans quelle mesure ils ont acquis la capacité à en rendre compte langagièrement, au moins partiellement.

Codage des réponses des élèves

ANALYSE QUANTITATIVE SUR L'ENSEMBLE DE L'ÉCHANTILLON

Les réponses des élèves à la première question ont été codées tout d'abord de façon binaire : 1 pour les élèves dont les réponses témoignent (même de façon très partielle) du fait d'avoir trouvé le point J par un raisonnement utilisant une propriété du cercle (par exemple même seulement si des segments issus de J sont tracés). Toute autre réponse, en particulier celles des élèves ayant uniquement utilisé le compas pour tester s'il était possible de tracer le cercle, a été codée 0 (même si les élèves ont trouvé le point J). Ces réponses sont toutefois distinguées du non-traitement de la question (codé NT).

Nous avons ensuite codé le fait que la réponse des élèves témoigne d'un raisonnement sur les points et les distances (par exemple : « le point J est le point de ce cercle car la distance entre le point J et les points C, B, D et E sont de 4 cm. ») ou sur les rayons et leurs longueurs (« [JC], [JB], [JD] et [JE] sont de même longueur (4 cm) donc J est le centre »), même si la formulation est très approximative.

Enfin, nous avons codé le fait que les élèves utilisent le mot « distance ». Notons qu'il est possible de formuler la justification correctement sans l'utiliser mais que le fait de l'utiliser nous semble témoigner d'un niveau plus avancé de secondarisation.

Le codage des moyens langagiers utilisés pour la prise en compte des relations s'est révélé trop complexe, du fait de la difficulté des élèves à formuler leurs réponses.

ANALYSE QUALITATIVE SUR DEUX CLASSES EN ÉDUCATION PRIORITAIRE

Dans un deuxième temps, nous avons analysé plus finement les productions langagières des élèves dans la deuxième question de l'exercice (cf. figure 2), pour une classe expérimentale en éducation prioritaire et une classe témoin du même établissement (d'effectifs respectivement 19 et 21). La classe expérimentale est

[11] Si on pousse l'analyse logique jusqu'au bout, il s'agit même d'une relation entre cinq objets, dont le cinquième est plus ou moins implicite : quatre relations d'égalités à ce cinquième objet, puisqu'il s'agit de dire que chacune des distances JB, JC, JD et JE est égale au (même) rayon-longueur. L'enchainement des égalités, dans la formulation symbolique, implique ces égalités deux à deux par transitivité de l'égalité.

celle d'une des enseignantes du groupe,[12] mais dont la séquence présente une particularité : une séance a été ajoutée, portant sur la comparaison d'énoncés incluant le mot distance mais issus d'un contexte autre que les mathématiques et sur l'analyse de traductions de certains de ces énoncés dans des langues familiales des élèves autres que le français (notamment en turc et en arabe). Ce travail a notamment amené les élèves à prendre conscience de la nécessité, en mathématiques, de préciser un point de départ et un point d'arrivée lorsqu'on parle de distance, et des différents moyens de le faire (en particulier en parlant de « distance de… à … » ou de « distance entre … et … »).

> Ylan dit que : « ça ne peut pas être le point H parce que la longueur de B n'est pas la même que la longueur de C ». Le professeur dit qu'Ylan a raison mais que c'est mal dit.
> Ecris de façon correcte ce qu'a voulu dire Ylan :

Fig. 2 : Question 2 de l'exercice 3 du posttest

L'analyse *a priori* de cette deuxième question montre qu'elle suppose de corriger « longueur de B » (resp. « longueur de C »), soit en évoquant les segments [HB] (resp. [HC]), soit en évoquant une relation entre B et H (resp. entre C et H). Les réponses correctes avec formulations correctes peuvent donc être du type : « Ça ne peut pas être le point H car la longueur du segment [HB] n'est pas la même que la longueur du segment [HC] » ou « Ça ne peut pas être le point H car la distance de B à H n'est pas la même que la distance de C à H ». La relation d'égalité était, quant à elle, déjà prise en charge dans la phrase d'Ylan, même si elle pouvait être modifiée, par exemple en parlant de grandeurs « égales » plutôt que d'être « la même ». Notons toutefois que cela pose des difficultés aux élèves, en particulier en lien avec l'accord en nombres (du fait que plusieurs choses sont égales à une seule et même chose). On trouve par exemple des phrases du type : « [JC] [JB] [JD] [JE] est egal a 4 cm ».

Le codage des réponses des élèves a ainsi visé à identifier les réponses qui rendent compte d'une identification de ces enjeux dans la reformulation de la phrase d'Ylan. Toutefois, nous n'avons comptabilisé que ceux qui, lorsqu'ils évoquent une relation, donnent une relation complète. Par exemple, nous avons comptabilisé comme relation complète la réponse « Ça ne peut pas être le point H car la distance entre le point H et C est très proche contrairement à la distance entre le point H et B. » (classe Exp.). En revanche, la phrase : « Ça ne peut pas être le point H car le point C n'est pas à la même distance que B » est considérée comme rendant compte d'une relation incomplète car il est évoqué une distance, mais il n'est pas précisé distance « de (ou à) quoi ».

Parmi les réponses, nous avons également repéré celles qui incluaient des « erreurs de catégories », c'est-à-dire les réponses dans lesquelles une propriété est attribuée à un objet dont la nature fait qu'elle ne peut pas lui être attribuée ; par exemple, lorsqu'on parle de la longueur pour un point ou de la distance d'un segment. Ces erreurs de catégories peuvent aussi concerner l'utilisation des notations. Par exemple, dans la phrase : « Ça ne peut pas être le point H car le segment B et C n'est pas de même longueur », la relation n'est pas complète et on note une erreur de catégorie car l'élève évoque un « segment B et C ». On peut noter également dans cette dernière phrase que la relation d'égalité des longueurs n'est pas complète (puisqu'il n'est pas précisé de même longueur « que quoi »), sauf à interpréter que l'élève a voulu parler du segment d'extrémité B et du segment d'extrémité C (les deux segments étant issus de H, autrement dit, les rayons d'extrémités B et C), mais même dans ce cas, il reste une difficulté avec l'utilisation du verbe au singulier. La complexité d'une forme langagière permettant de rendre compte de façon complète et correcte, à la fois sur le plan mathématique (des objets et des notations) et de la langue est de toute évidence trop grande pour cet élève.

[12] On trouvera des exemples de situations travaillées, avec des productions d'élèves et un exemple de discussion collective dans Cerclé et al. (à paraître).

Résultats

Nous présentons tout d'abord les résultats quantitatifs obtenus sur la mobilisation d'une des procédures attendues.

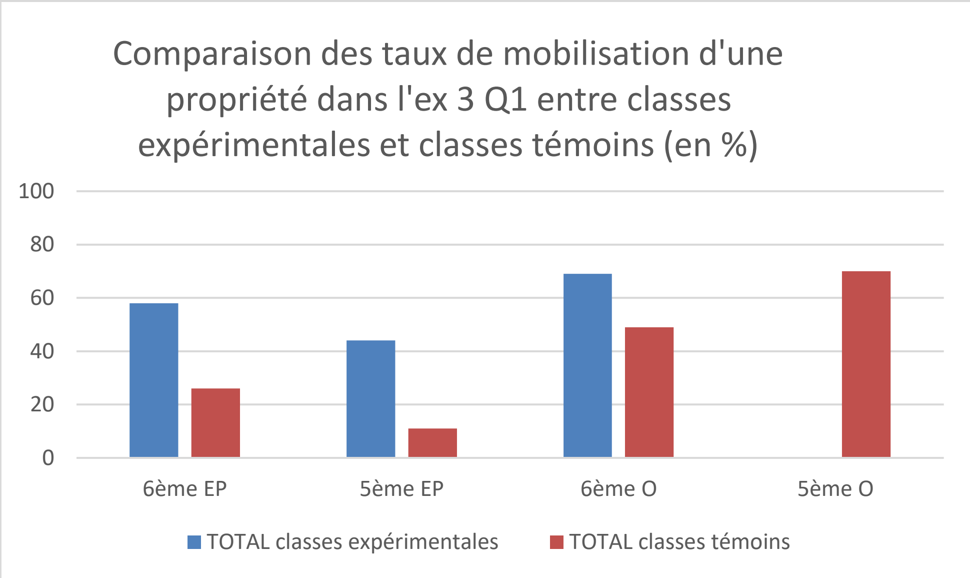


Fig. 3 : Comparaison des taux d'élèves ayant trouvé le point J en mobilisant une propriété du cercle, dans la question 1 de l'exercice 3 entre classes expérimentales et classes témoins, pour les élèves ayant traité la question

On peut noter une différence nette entre les taux de réussite (c'est-à-dire parmi les élèves ayant traité la question, ceux qui ont trouvé le point J en s'appuyant sur un raisonnement mobilisant une propriété du cercle) dans les classes expérimentales et dans les classes témoins, encore plus marquée en éducation prioritaire. On note par ailleurs un écart important entre les taux de non traitement de la question : 7 % dans les classes expérimentales contre 20 % dans les classes témoins.

Par ailleurs, parmi ces élèves, 50 % des élèves des classes expérimentales (46 % dans celles qui sont en éducation prioritaire) élaborent leur réponse avec un raisonnement sur les distances entre des points, contre seulement 22 % des élèves des classes témoins et même moins de 2 % dans les classes témoins en éducation prioritaire. A l'inverse, dans les classes expérimentales, seulement 9 % raisonnent sur les longueurs de segments et environ 18 % utilisent le compas ; dans les classes témoins, 15 % raisonnent sur les longueurs et 28 % utilisent le compas.

Enfin, près d'un quart des élèves utilisent le mot distance dans les classes expérimentales, quand seulement 8% le font dans les classes témoins.

Nous proposons maintenant les résultats de l'analyse qualitative plus fine de la comparaison entre les productions des élèves d'une des classes expérimentales en éducation prioritaire et d'une classe témoin du même établissement, pour la question 2. La répartition des réponses est indiquée dans le tableau en figure 4.

	Effectif total	Relation complète	Relations incomplètes (dont Erreurs de Catégories)	Réponses inadéquates	NT
Classe expérimentale	19	10	8 (5)	1	0
Classe témoin	21	4	9 (8)	2	6

Fig. 4 : Comparaison des réponses à la question 2 de l'exercice 3 entre une classe expérimentale et une classe témoin en éducation prioritaire

Les élèves de la classe expérimentale produisent nettement plus de réponses (18/19 contre 15/21), et beaucoup produisent des relations complètes (10 sur les 18 élèves ayant produit une réponse adéquate contre 4 sur 13). On peut noter également un plus grand nombre d'erreurs de catégories dans la classe témoin.

Par ailleurs, les élèves de la classe expérimentale emploient aussi nettement plus le mot distance (11 sur 18 contre 1 sur 13).

Conclusion

L'échantillon reste limité à quelques classes et quelques enseignant·es, mais il nous semble toutefois que ces résultats tendent à confirmer nos hypothèses sur les effets d'une prise en charge des enjeux langagiers autour de la notion de distance sur la secondarisation des discours des élèves.

Ils tendent à conforter l'idée qu'un travail sur la notion de distance entre des points, incluant des tâches spécifiques et une prise en compte des enjeux langagiers comme « objets d'apprentissage » (Chesnais, 2018), permet d'améliorer la capacité de nombreux élèves (y compris des élèves identifiés comme étant très en difficulté), à accéder à un certain degré de conceptualisation du cercle comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné, ainsi qu'à améliorer leur capacité à rendre compte langagièrement de raisonnements portant sur ces objets. Ces choix semblent donc permettre d'atténuer en partie les effets de différenciation passive (Rochex & Crinon, 2011) en levant une partie de la transparence de certains attendus du cours de mathématiques.

Les enjeux langagiers travaillés dans la séquence dépassent largement le thème du cercle, à la fois parce qu'ils portent sur la notion de distance, qui joue un rôle important, en lien avec de nombreuses autres notions jusqu'au lycée, et parce qu'ils concernent plus globalement la prise en charge langagière des relations (Auger & Chesnais, 2020). Cependant, les effets d'amélioration des apprentissages par ce type de pratiques ne peuvent résulter d'une prise en charge ponctuelle et nécessitent de nombreuses récurrences, sur du temps suffisamment long. Les effets observés dans cette expérimentation tiennent ainsi peut-être tout autant du travail spécifique mené sur le cercle que des effets sur les pratiques des enseignants d'une prise de conscience plus globale de la nécessité de lever la transparence des enjeux langagiers dans la classe de mathématiques.

Bibliographie

Artigue, M. & Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 5-64.

Auger, N. & Chesnais, A. (2022). Enjeux syntaxiques dans les apprentissages mathématiques et plurilinguisme. Dans P. Escudé, C. Hache & C. Mendonça Dias (dir.). *Plurilinguisme et mathématiques*. Editions Lambert Lucas.

Barrier, T., Durand-Guerrier, V. & Mesnil, Z. (2019). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques. *Éducation et Didactique*, 13-1, 61-81. http://journals.openedition.org/educationdidactique/3793.

Barrier, T. & Durand-Guerrier, V. (2017). La quantification au cœur des relations entre langage, raisonnement et apprentissages mathématiques. Dans *Actes du 22e colloque de la CORFEM*, Nîmes, France.

Baudart, F. (2011). Monde de l'oral et monde de l'écrit en mathématiques. *Le Français Aujourd'hui, 174*, 107-118. https://doi.org/10.3917/lfa.174.0107

Bautier, E. (2007). Maîtriser la langue, oui mais pourquoi (en) faire ? Dans Apprendre et enseigner en «milieux difficiles », *Sélection d'articles du bulletin XYZep, textes choisis par le centre Alain Savary*. INRP. 191 p.

Bautier, É. & Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue Française de Pédagogie, 148*, 89-100.

Bourdieu, P. & Passeron, J.-C. (1964). Les *héritiers. Les étudiants et la culture*. Les Éditions de Minuit.

Bulf, C. & Céli, V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire une transition clé : du gabarit au compas, *Grand N, 97*, 21-58.

Bulf, C., Celi, V., Million-Fauré, K., Beaugrand, C. & Mendonça Dias, C. (2021). Tracé du cercle et circulation des discours (première partie). Approche didactique des (inter)actions langagières et matérielles, *Petit x, 114*, 3-37.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat, *Recherches, 41*, 177-182. <halshs-00483165>

Cerclé, V., Chesnais, A. & Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie), *Petit x, 113*, 59-88. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/113x4_1633083537539-pdf.

Cerclé, V. Chesnais, A., Daval, N., Destribats, A., Lahmouche, N., Lefaucheux, J. & Lefort, J. (à paraître). *Actes de la CORFEM 2022* (Nantes, 9 et 10 juin 2022).

Chesnais, A. (2018a). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement. Note de synthèse en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches*. Université de Montpellier. ⟨tel-02046178⟩

Chesnais, A. (2018b). La différenciation des pratiques enseignantes en mathématiques entre éducation prioritaire et milieu « ordinaire » : déterminants et marges de manœuvre. Dans B. Fouquet-Chauprade & A. Soussi (Coord.), *Pratiques pédagogiques et enseignement prioritaire*. Peter Lang, p. 183-210.

Chesnais, A. & Coulange, L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques », *Revue Française de Pédagogie, 214*, 85-121. https://doi.org/10.4000/rfp.11357

Chesnais, A. & Mathé, A.-C. (2018). Construire les objets élémentaires de la géométrie, de l'école au lycée : une cohérence possible ? *Conférence au XXVème colloque de la COmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques* (Bordeaux, 11 et 12 juin 2018). https://docplayer.fr/86565769-Construire-les-objets-elementaires-de-la-geometrie-de-l-ecole-au-lycee-une-coherence-possible.html

Chevallard, Y. & Johsua, M.-A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique – la notion de distance, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*, 157-237.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique des Mathématiques et de Sciences Cognitives*, 10, 5-55.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, 97, 27-43.

Jaubert, M., Rebière, M. & Bernié, J.-P. (2012). *Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative.* Dans forumlecture.ch, Plate-forme internet sur la littéracie. http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse d'état, Grenoble, Université Joseph Fourier.

Lahire, B. (1993). *Culture écrite et inégalités scolaires : Sociologie de l'échec scolaire à l'école primaire*. PUL, 310 p.

Mathé, A.C., Maillot, V. & Ribennes, J. (2022). Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2, *Grand N, 108*, 27-57.

Margolinas, C. & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J. Y. Rochex & J. Crinon (dir.), *La construction des inégalités scolaires*. PUR, p. 19-32.

Noirfalise, R. (1994). Développement cognitif et résolution de problèmes : Caractéristiques du sujet ou adaptation à un milieu ? *Bulletin de l'APMEP, 393*, 149-163.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.J. & Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de cm2, *Grand N, 77*, 7-34.

Rebière, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Dans A. Bronner, & al. (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. La Pensée Sauvage.

Robert A. (2008a). Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Octarès, p. 45-68.

Rochex J-Y. & Crinon J. (dir.) (2011). *La construction des inégalités scolaires : Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Presses universitaires de Rennes. 214 p.

Vergnaud, G., 1981, *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. P. Lang.

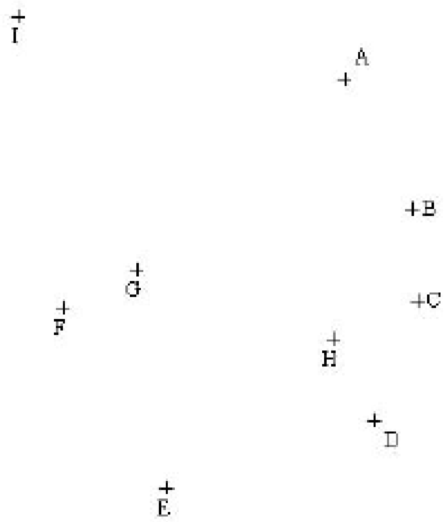
Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*, 96, 79-86.

Annexe – Exercice tiré des évaluations à l'entrée en 6ème proposées par le ministère de l'éducation nationale français en 2000 et 2004 à tous les élèves de 6ème.

Exercice 33

Les points A, B, C et D sont sur un même cercle.
Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.
En utilisant ta règle graduée, trouve le centre de ce cercle.



Le centre du cercle est le point : ....

Explique comment tu as trouvé.

....

....

....