TACHES DE GENERALISATION AVEC DES ELEVES AVEC MLD : PRIVILEGIER LE PROCESSUS AU RESULTAT

Francesca Gregorio

Haute École Pédagogique du canton de Vaud

Les *Mathematical Learning Disabilities* (MLD) entrainent des difficultés des apprentissages persistantes et/ou spécifiques aux mathématiques. Cet article présente deux études de cas d'élèves du Secondaire I avec MLD dans le canton de Vaud. Lors de la résolution de tâches de généralisation et d'argumentation, ces élèves peuvent être capables de s'appuyer sur la structure du problème, en faisant preuve d'un potentiel d'apprentissage dont il faudrait tenir compte pour les pratiques de classe.

Mots clés : dyscalculie, généralisation, MLD, troubles des apprentissages

INTRODUCTION

Les troubles et difficultés des apprentissages suscitent un intérêt grandissant ces dernières années, que cela soit du côté de la recherche en psychologie, sciences cognitives, didactique (Deruaz et al., 2020 ; Giroux, 2011 ; Lewis & Fisher, 2016) ou des institutions politiques (DFJC, 2019).

Selon le Manuel Diagnostique et Statistique des Troubles Mentaux (DSM–5 ; APA, 2013) rédigé par l'association américaine de psychiatrie, les troubles spécifiques des apprentissages relèvent de troubles neurodéveloppementaux d'origine biologique qui sont à la base de difficultés scolaires spécifiques et persistantes en absence d'un handicap ou d'autres raisons qui pourraient les expliquer. Ils sont diagnostiqués grâce à des tests spécifiques et, en ce qui concerne les mathématiques, les difficultés qui font l'objet de ces processus d'évaluation concernent la maîtrise du sens du nombre, les faits numériques, le calcul, le codage-décodage des nombres en chiffres, la mémoire de travail et plus génériquement le raisonnement mathématique (APA, 2013 ; Geary, 2011). Les DSM, comme plus généralement la neuropsychologie et la psychologie cognitive, lie les difficultés en mathématiques principalement au fonctionnement cognitif et aux caractéristiques propres à l'individu (Giroux, 2011).

Les récentes recherches en didactique et en *mathematics education* s'emparent du concept de trouble des apprentissages en prenant une posture holistique avec le terme MLD – *Mathematical Learning Disabilities* ou *Difficulties*– qui inclue de manière plus générale les élèves en grande difficulté en mathématiques (Baccaglini-Frank et al., 2014 ; Deruaz et al., 2020). Selon ce point de vue, les difficultés ne peuvent pas être expliquées seulement à travers les caractéristiques individuelles mais doivent être encadrées dans le contexte scolaire (Giroux, 2011).

Dans cet article, nous présentons un résumé de la revue de littérature à propos des MLD et de la pensée algébrique et décrivons une recherche concernant le raisonnement mathématique d'élèves avec MLD, notamment en algèbre, en en dégageant des pistes et des postures souhaitées pour la prise en charge de ces élèves par le corps enseignant.

ÉLÈVES AVEC MLD

Même si une définition stabilisée et partagée n'existe pas encore (Gregorio, 2022a), la littérature en *mathematics education* utilise de plus en plus l'acronyme MLD, avec lequel on se réfère à trois différentes catégories : les élèves avec *Math Disorder*, *Learning Disabilities* ou *Severe Difficulties in Mathematics* (Deruaz et al., 2020). Les deux premières catégories correspondent à ce que le DSM–5 (APA, 2013) nomme les troubles spécifiques des apprentissages décrits dans la section précédente, respectivement en mathématiques (*Math Disorder,* et en particulier inclue les élèves avec un diagnostic de dyscalculie) ou en dehors des mathématiques (*Learning Disabilities*). Ces élèves ont reçu un diagnostic effectué à travers un test standardisé. Pour les *Math Disorde*s, les tests sont spécifiques aux mathématiques, permettant d'identifier des difficultés persistantes et spécifiques aux maths (Deruaz et al., 2020). Pour les *Learning Disabilities* les tests ne sont pas spécifiques aux mathématiques ; ils identifient les difficultés persistantes d'apprentissage mais non nécessairement spécifiques aux mathématiques.

Si ces deux premières catégories couvrent la définition des troubles spécifiques des apprentissages du DSM–5 (APA, 2013) qui est généralement utilisée en sciences cognitives, il est nécessaire en didactique des mathématiques d'élargir la définition. En effet, le diagnostic n'est pas toujours accessible au corps enseignant, parfois pour des raisons de confidentialité. Les enseignantes et enseignants peuvent savoir qu'il y a un diagnostic sans pourtant connaître les aspects des mathématiques pour lesquels élèves rencontrent des difficultés parmi ceux testés. Dans ce cas, le diagnostic ne peut pas étayer la mise en place d'une intervention auprès des élèves. De surcroît, les élèves en grande difficulté n'ont pas toujours eu l'occasion d'effectuer un test diagnostique. En classe on peut donc se retrouver face à des élèves en difficulté à cause d'une hétérogénéité de raisons qui ne sont pas toujours connues, avec l'objectif pour l'enseignant de prendre en charge ces difficultés indépendamment de l'existence d'un diagnostic.

Les constats décrits dans le dernier paragraphe ont orienté la recherche en *mathematics education* vers la prise en considération d'une troisième catégorie, celle des *Severe Difficulties in Mathematics.* Elle correspond à des élèves en grande difficulté en mathématiques sans pourtant avoir été identifiées via un test utilisé pour les *Math Disorders* ou les *Learning Disabilities* (Deruaz et al., 2020). Le repérage de ces élèves se fait à travers des tests non médicaux et non standardisés (par exemple des tests réalisés en école au niveau de la classe) ou via l'identification du corps enseignant. Cette catégorie inclut les élèves rencontrant des difficultés spécifiques aux mathématiques, mais dont la persistance n'a pas été testée.

En cohérence avec la définition et les difficultés énoncées dans le DSM–5, la plupart des études sur les MLD portent sur l'arithmétique et plus précisément sur des connaissances mathématiques de base (Deruaz et al., 2020 ; Lewis et Fisher, 2016). En effet, la grande majorité des recherches s'intéresse à des sujets mathématiques élémentaires avant la troisième année d'école primaire et seulement une partie minoritaire couvre des sujets du secondaire. De surcroît, les tests de diagnostic existant couvrent quasi exclusivement le domaine arithmétique et sont destinés à des élèves jusqu'à onze ans (Peteers, 2020). Ce fait cache l'hypothèse implicite que les difficultés dans tout domaine mathématique puissent être expliquées par des difficultés en arithmétique (Baccaglini–Frank et al., 2020), hypothèse très discutable, car il est possible de rencontrer des difficultés en mathématiques sans avoir des difficultés en arithmétique, ou ne pas avoir des MLD, mais avoir des difficultés en arithmétique. Pour toutes ces raisons, il est important d'élargir le champ de recherche sur les élèves avec MLD en ce qui concerne les sujets mathématiques (Deruaz et al., 2020 ; Lewis & Fisher, 2016). En particulier, il est capital de se concentrer sur le raisonnement mathématique, avec un focus particulier sur la perception des relations et structures, la généralisation, l'abstraction et l'argumentation (Baccaglini–Frank et al., 2020), en mettant en valeur ce que ces élèves savent faire et leurs compétences, outre que leurs difficultés (Lewis, 2014).

CADRE THÉORIQUE ET QUESTION DE RECHERCHE

La pensée algébrique est un domaine particulièrement adapté au développement de la réflexion autour de la structure mathématique, de l'argumentation et des processus de généralisation et d'abstraction. Nous encadrons notre recherche dans l'approche de l'*early algebra*, qui voit l'arithmétique et l'algèbre comme un continuum et en même temps permet de différencier les démarches calculatoires d'autres plutôt concentrées sur la structure et le raisonnement (Kieran, 1996 ; Malara & Navarra, 2018 ; Pilet & Grugeon–Allys, 2021). La posture de *l'early algebra* semble être particulièrement adaptée à l'étude des difficultés et compétences d'élèves avec MLD, car permet de séparer entre les difficultés liées plutôt aux connaissances numériques et celles concernant le raisonnement.

Selon certains auteurs, ce qui caractérise la pensée algébrique est l'analycité : elle permet de considérer les quantités indéterminées comme des nombres connus et d'opérer sur elles (Radford, 2018). Selon d'autres, l'aspect caractéristique de l'algèbre est la généralisation. Par exemple, Kaput (2008) définit la pensée algébrique comme la généralisation de régularités et son expression dans des systèmes de symboles conventionnels. Malara et Navarra (2018) conçoivent l'arithmétique et l'algèbre comme une métadiscipline pour laquelle la généralisation est centrale. Lors du processus d'enseignement-apprentissage, en arithmétique comme en algèbre, on peut se déplacer d'un point de vue procédurale à un relationnel. Cela peut être fait avec le symbolisme algébrique standard à travers par exemple la généralisation de régularités numériques, ou simplement dans le domaine arithmétique travaillant sur l'équivalence et la transformation d'écritures sur la base de propriétés. Il est donc possible de travailler des aspects algébriques comme la généralisation, la structure mathématique, la pensée relationnelle déjà en champ arithmétique.

Malara et Navarra (2018) se sont intéressés au développement de la pensée algébrique et à comment aborder l'enseignement des mathématiques en classe afin d'en favoriser la génération. Ils identifient différents *construits*[1], résumés dans la Fig. 1 et détaillés dans les lignes suivantes, fondamentaux à ce propos. Ces *construits* permettent de stimuler et soutenir le recours à une pensée mathématique basée sur la structure et le raisonnement plutôt que sur la simple application des calculs, en passant du plan de l'action à celui de la réflexion. Leur observation auprès des apprenants peut également témoigner le recours et la mise en place de procédures basées sur la pensée algébrique.

Favoriser le changement de focus du résultat au processus	Favoriser les pratiques :
- Représenter versus résoudre - Processus versus produit - Transparent versus opaque	- Argumentation - Généralisation

Fig. 1 : Les *construits* de Malara et Navarra (2018)

La première famille de *construits* concerne le changement de focus du *résultat* au *processus* (Malara & Navarra, 2018). En effet, l'approche traditionnelle à l'arithmétique porte une grande attention sur l'identification du *résultat*, parfois même au détriment du cheminement pour y arriver : résoudre un problème et en présenter la solution numérique sont considérés comme synonymes dans de nombreux contextes scolaires. Le manque de focus sur le *processus* pour arriver au *résultat* peut empêcher le développement d'importantes compétences mathématiques. Une première manière de soutenir le changement de focus du *résultat* au *processus* est englobée dans le *construit représenter* Vs *résoudre*. L'accent est mis sur la *représentation* d'un problème mathématique plus que sur son immédiate *résolution*, en favorisant un point de vue portant plus sur les relations et la structure que sur le calcul et les opérations. Cela favorise des manières de penser qui permettent de développer la pensée algébrique en minimisant le point de vue opérationnel au profit du point de vue relationnel. Prenons comme exemple le problème suivant « Marina a des billes noires et blanches et les place dans les boîtes comme indiqué dans la Fig. 2. Représentez la situation en langage mathématique afin de trouver le nombre de billes ». La consigne du problème est explicitement construite pour favorise le travail sur la *représentation* de la situation afin de mettre en lumière sa structure et le lien avec la distributivité. Une consigne focalisée seulement sur le nombre de billes ne permettrait pas ce travail sur les propriétés et la structure, mais conduirait simplement les élèves à se concentrer sur la résolution et sur les calculs pour obtenir le nombre de billes.

[1] Plus précisément, Malara et Navarra (2018) parlent de *language constructs*, dont nous avons proposé une adaptation pour cet article. Sans rentrer ici dans le détail de la justification de ce terme, dans cette approche l'apprentissage arithmétique et algébrique est conçu en analogie avec l'apprentissage du langage naturel.

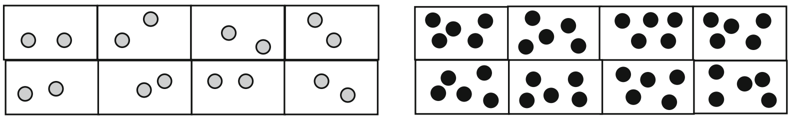

Fig. 2 : Problème des billes de Malara et Navarra (2018, p.59)

Cette dichotomie est fortement reliée à celle entre *processus* et *produit*[2] qui participe également au changement de focus du *résultat* au *processus* : être très centré sur la résolution amène à se concentrer quasi exclusivement sur le *produit* du calcul au détriment du *processus* qui a permis de l'obtenir (Malara & Navarra, 2018). Par exemple, dans le problème de la Fig. 2, nous pourrions nous contenter du résultat « 56 », ou au contraire porter l'attention des élèves sur le processus qui permet d'y arriver. La focalisation sur le *produit* empêche l'étude de la structure du problème et par là même celle du raisonnement mathématique nécessaire pour le résoudre.

Selon Malara et Navarra (2018), l'attention aux *représentations* des problèmes et aux *processus* de résolution favorise des représentations *transparentes*, qui permettent l'accès à des informations explicites sur la structure du problème. Ces représentations *transparentes* sont en opposition avec les représentations *opaques* qui en cachent la structure. Il s'agit du troisième *construit* : représentations *transparentes* Vs représentations *opaques* (Fig. 1). Dans l'exemple précédent du problème de la Fig. 2, une représentation *opaque* du nombre de billes de Manon est simplement « 56 » qui demeure implicite en ce qui concerne le lien avec le problème. Au contraire, « $2 \cdot 4 \cdot (2 + 5)$ » est *transparente*, car le lien entre la structure du problème et sa modélisation est explicite. Une représentation est plus *transparente* quand le nombre n'est pas dans sa forme *canonique* (dans l'exemple, « 56 »), mais dans une de ses formes *non canoniques* (comme « $2 \cdot 4 \cdot (2 + 5)$ ») qui en met en évidence certaines caractéristiques sur lesquelles il est utile de porter l'attention aux fins de la compréhension et résolution du problème.

Selon Malara et Navarra (2018) l'argumentation et la généralisation sont capitales pour le passage d'une focalisation sur le *résultat* à celle sur le *processus*, et elles font donc partie des *construits* à disposition des enseignants pour stimuler la génération de la pensée algébrique. En effet, la proposition d'activités mathématiques qui visent à généraliser une situation précise et l'argumentation des propos mathématiques permettent de mettre en place des raisonnements travaillant la structure et le sens du problème. D'un côté, la généralisation permet de s'éloigner d'un cas particulier ou d'un nombre fini de cas pour lesquels une certaine propriété a pu être vérifiée et d'en élargir l'ensemble de validité (Kaput, 2008). La portée des faits généralisés est toujours plus grande que celui de l'ensemble initial. L'argumentation, quant à elle, permet de développer des idées et des intuitions qui n'étaient pas encore complètement établies avant de les communiquer. Elle s'appuie sur la verbalisation pour nourrir la métacognition sur ce qui est fait ou dit, et en particulier sur les généralisations accomplies.

Dans cet article nous nous intéressons à la pensée algébrique d'élèves avec MLD et, en particulier, nous voulons mettre en évidence des compétences que des élèves en grande difficulté en mathématiques peuvent avoir. Pour cela faire, nous allons nous intéresser à la pensée algébrique, qui est un domaine qui permet de travailler différents aspects mathématiques autres que ceux qui constituent une des difficultés classiques des élèves avec dyscalculie, tels que le sens du nombre, les faits numériques, le calcul, le codage-décodage des nombres et la mémoire de travail. Nous nous demandons donc : quel potentiel d'apprentissage peut être révélé par la mise en œuvre de tâches de généralisation et d'argumentation avec des élèves avec MLD ?

[2] Malara et Navarra (2018) utilisent le mot anglais « *product* ». Dans le contexte de cet article, le terme « produit » ne signifie pas le résultat d'une multiplication.

MÉTHODE

Dans cet article, nous présentons deux études de cas, Clément et Ambre[3]. Il s'agit d'élèves relevant de la catégorie des *Math Disorders* du secondaire I qui suivent leur scolarité dans une école ordinaire du canton de Vaud.

Clément, 14 ans, est en 10H VG1[4] et a un diagnostic de trouble de dyscalculie et de dyspraxie visuospatiale. Ces troubles entrainent des difficultés d'attention, d'organisation et de planification dans l'exécution des tâches. Il a d'importantes difficultés en calcul et a besoin de beaucoup plus de temps par rapport à ses camarades. Pour tenter de remédier à ces difficultés, il a été rédigé un contrat d'aménagement entre le doyen et les parents de Clément concernant toutes les disciplines scolaires.

Ambre, 14 ans, est en 11H VG1 et a un diagnostic de dyscalculie et de dyslexie. Une hypotonie musculaire est soupçonnée, ce qui la fatigue très rapidement. Elle a de grandes difficultés en mathématiques et ses résultats sont instables selon le thème traité. Elle a des difficultés dans la compréhension des marches à suivre pour l'accomplissement d'une tâche et elle a parfois de la peine à comprendre les énoncés. Ambre a également des difficultés dans d'autres disciplines, mais réussit particulièrement bien en dessin. Pour prendre en considération sa situation, Ambre a été exemptée du cours d'allemand depuis l'école primaire et du cours d'anglais depuis la 10H.

Les deux élèves ont résolu la tâche mathématique « La suite de carrés » (Fig. 3) présentée dans la section suivante. La résolution de la tâche a été effectuée lors d'un entretien clinique conduit par l'autrice de cet article. La personne menant l'entretien avait à disposition une calculatrice qu'elle proposait aux élèves en cas de difficulté de calcul.

Les entretiens ont été filmés et les échanges oraux retranscrits. Les transcriptions ont été ensuite enregistrées et analysées. Le cadre de Malara et Navarra (2018) présenté précédemment a étayé l'analyse des procédures mises en place par les élèves. En particulier, nous avons classé les différentes étapes de résolution selon les *construits* résumés dans la Fig. 1.

ANALYSE DE LA TÂCHE « LA SUITE DE CARRÉS »

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés ? Et de 5 carrés ?
b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ?
c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?
d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles ? Si oui, comment ?

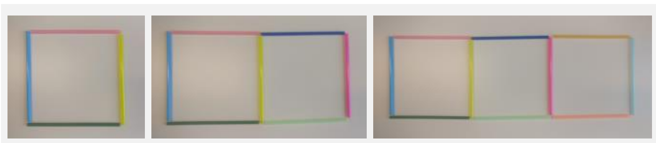

Fig. 3 : La tâche « La suite de carrés »

[3] Clément et Ambre sont des pseudonymes.

[4] Dans le canton de Vaud, le secondaire I est partagé en 3 niveaux en mathématiques selon les notes obtenues à la fin de l'école primaire. Dès notes les plus hautes aux plus basses : VP, VG2, VG1.

« La suite de carrés » (Fig. 3) est une tâche classique et peut être proposée, avec les adaptations nécessaires, à différents niveaux scolaires. Par exemple, Weber et al. (2015) ont construit une leçon pour l'école primaire (pour des élèves de 8-10 ans) autour d'un problème similaire (« Les 99 carrés »), ou les Moyens d'Enseignement officiels des cantons romands en proposent plusieurs pour le Primaire (par exemple « Avec des allumettes », en 7H ; CIIP, 2022) ou le Secondaire I (comme le « FA2 Escaliers », en 10H ; CIIP, 2012[5]). L'objectif de « La suite de carrés » est la généralisation de la suite, d'abord à l'étape 100, nombre particulier en dehors de la portée sensible, et dans un deuxième temps au cas général où le nombre de carrés n'est pas connu. La tâche se prête bien à l'argumentation, qui est d'ailleurs capitale pour expliquer le processus de généralisation.

Analysons maintenant les procédures attendues pour les différentes sous-tâches de « La suite de carrés ».

Sous-tâche a)

Pour la sous-tâche a), on peut s'attendre à ce que les élèves reproduisent la suite pour 4 ou 5 carrés et comptent les pailles dessinées (ou utilisées dans le cas d'utilisation de matériel). Cette sous-tâche est conçue pour donner aux élèves la possibilité de remarquer que la suite est construite avec une certaine régularité et que pour passer d'une étape à la suivante il faut toujours ajouter 3 pailles. Il s'agit donc d'une manière pour favoriser l'attention sur le *processus*. Cependant, il est possible de répondre à la question a) en restant plutôt au niveau du *résultat*. Pour dessiner correctement la suite, il faut déjà avoir remarqué comment elle est construite, et donc sa structure. De plus, on peut avoir différents niveaux de représentation de celle-ci : la relation qui lie deux étapes successives peut être mise en évidence (comme dans la Fig. 4) ou peut demeurer implicite. Lors du comptage il est néanmoins possible de compter une à une les pailles. Dans ce cas l'attention est totalement tournée vers l'obtention du *résultat* final qui sera *opaque*, car ne communiquera pas d'information sur la structure de la suite. Au contraire, on peut imaginer de partir du nombre de pailles nécessaires pour les carrés donnés dans la consigne (Fig. 3) puis d'ajouter directement 3 : « pour former 4 carrés il faut 10+3=13 pailles ». Avec cette procédure, l'élève se focalise sur le *processus* qui permet d'obtenir le résultat final et l'écriture du 13 comme 10+3 est *transparente*, car elle permet d'accéder à la structure de la suite : pour obtenir l'étape successive, il faut toujours ajouter 3 pailles.

Fig. 4 : Une représentation de « La suite de carrés » où la relation entre les étapes successives est mise en évidence

Sous-tâche b)

La sous-tâche b) a été proposée pour pousser les élèves ayant utilisé des procédures plutôt tournées vers le *résultat* et le *produit* à remarquer la structure de la suite et les relations en jeu. Les procédures possibles sont les mêmes que celles décrites pour les 4 et 5 carrés. Le nombre de carrés étant élevé, la reproduction des 12 carrés amène les élèves à aller à la ligne dans le dessin à cause d'un manque d'espace pour reproduire les 12 carrés à la suite. Une erreur classique est celle de la Fig. 5, dans laquelle Clément dessine deux fois la même paille verticale, une première fois à la fin d'une ligne et une deuxième à la ligne suivante.

[5] Pour approfondir cette tâche, consulter Batteau et Clivaz (2023).

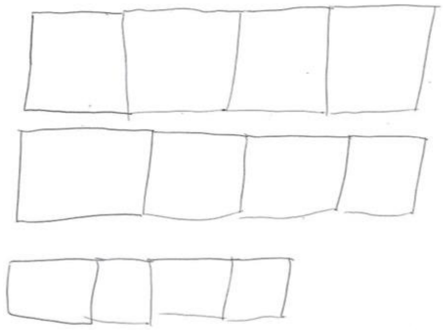

Fig. 5 : Reproduction des 12 carrés par Clément

Sous-tâche c)

Avec la sous-tâche c), nous avons voulu défavoriser le recours à la reproduction de la suite. En effet, même s'il est toujours possible de dessiner ou construire les 100 carrés, cette procédure, qui s'annonce très longue et à haut risque d'erreur lors du comptage des pailles, décourage les élèves. Une autre procédure qui ne se base pas sur la reproduction doit alors être recherchée, elle s'appuie dès lors davantage sur la structure de la suite en la généralisant. Une première procédure faisant appel à la structure et la régularité de la situation se base sur la relation de récursivité entre étapes successives (à chaque carré on ajoute 3 pailles) sans pourtant aboutir à une formule compacte qui prenne en compte le nombre 100. Un exemple de cette procédure est la suivante : « on a 4 pailles du carré de départ et après on ajoute 3 pailles pour les autres carrés. Du coup il faut faire 4+3+3+3+… jusqu'à arriver à 100 carrés[6]. » Cette formule, bien que *transparente* et focalisée plus sur le *processus* que le *produit*, s'appuie sur la présence des trois points pour exprimer la généralisation qui demeure encore partiellement implicite.

Un pas ultérieur pour la résolution de la sous-tâche c) peut être obtenu en prenant en compte le nombre de carrés directement dans la formule, en utilisant une variable muette (dans notre cas « 100 »). Un exemple est le suivant : « pour obtenir le nombre de pailles il faut faire 4+99·3 =301 ».

Ou encore, on pourrait trouver la formule littérale et l'appliquer à *n*=100 : $[4+3(n-1)]|_{n=100} = 4 + 3 \cdot 99 = 301$. Dans les trois cas, les procédures se focalisent principalement sur le *processus* plutôt que sur le *résultat*, fournissant des solutions *transparentes* qui permettent d'accéder à la structure de la suite et aux relations entre les différentes grandeurs en jeu : le nombre de carrés et le nombre de pailles.

Sous-tâche d)

La sous-tâche d) oblige à s'affranchir de la référence à un cas numérique particulier. Principalement deux procédures correctes sont possibles[7]. La première est une généralisation au cas quelconque exprimée en langage naturel, par exemple « 4 plus 3 fois le nombre de carrés moins 1 ». La deuxième est une formule littérale, comme : « étant *n* le nombre de carrés, le nombre de pailles sera 4 + 3(*n*–1) ». Bien que les registres utilisés ne soient pas les mêmes, les deux procédures partagent une caractéristique très importante : la variable est explicite, dans la première comme « le nombre de carrés » et dans la deuxième comme « *n* ». Dans les deux cas, c'est le processus qui est mis en lumière et la réponse finale, qu'elle soit exprimée en langage naturel ou littéral-algébrique, est très *transparente* en ce qui concerne la structure du problème.

---

[6] Ici et dans ce qui suit, nous ne choisissons qu'une possible vision et décomposition de la suite pour illustrer les différentes procédures. D'autres sont possibles en amenant à des considérations similaires en ce qui concerne les procédures de résolution.

[7] Pour avoir plus d'informations sur le différences et similarités entre les procédures présentées dans cet article, consulter Radford (2001).

Difficultés

Bien entendu, nous n'avons rapporté ici que les procédures correctes. Nous désirons cependant attirer l'attention des lecteurs et lectrices sur certaines difficultés fréquentes.

Il arrive fréquemment que les élèves confondent la variable dépendante (le nombre de pailles) et celle indépendante (le nombre de carrés).

Il est commun pour les élèves d'avoir des difficultés dans la correcte représentation de la suite. Les élèves peuvent doubler les pailles en allant à la ligne comme dans la Fig. 5, ou doubler la paille verticale à chaque carré, ou encore poursuivre la suite différemment que prévu, par exemple en dessinant le troisième et quatrième carré de manière à former un grand carré de côté 2 pailles.

Une représentation incorrecte de la suite fréquente est celle qui se base sur une fausse relation de proportionnalité entre le nombre de carrés et le nombre de pailles. Les élèves ont tendance à identifier des relations comme $p=4c$ ou $p=3c$, où p est le nombre de pailles et c le nombre de carrés. La sous-tâche b), étant 12 multiple de 3, favorise donc des réponses comme « vu que $12=3\cdot4$, et pour 3 carrés il faut 10 pailles, alors pour 12 carrés il faut $10\cdot4=40$ pailles ». Le choix du nombre 12 a été fait aussi pour donner la possibilité aux élèves de mettre en acte la procédure proportionnelle dans un cas facilement vérifiable via le dessin, et fournit donc un contrexemple auquel se référer lors de la suite de la résolution.

Une dernière difficulté très répandue concerne le cœur de cette tâche, la généralisation. Trouver une réponse à la sous-question c) est difficile, spécialement dans le cas d'une formule compacte comme les deux dernières décrites dans la section « Sous-tâche c) ». Passer à la généralisation du cas quelconque de la sous-question d) est également difficile et souvent une source de blocage pour les élèves.

RÉSULTATS

Dans cette section, nous reparcourons les entretiens avec Clément et Ambre à propos de la tâche « La suite de carrés » à la lumière du cadre résumé dans la Fig. 1.

Clément

Clément trouve correctement la réponse à la question concernant 4 carrés en dessinant un quatrième carré collé aux trois de la photo de la consigne (Fig. 3) et en comptant les 13 pailles. Sa procédure est ici orientée vers le *produit* et le résultat est *opaque,* car il n'est pas porteur de la structure de la suite. Pour les 5 carrés, Clément n'a plus besoin du dessin, il procède directement avec le comptage oral : « quatorze, quinze, seize... seize ! ». Pour ce deuxième cas, Clément n'a pas dessiné la suite de 5 carrés, mais il s'appuie probablement encore sur la représentation graphique des étapes précédentes. En effet, il compte encore les pailles une à une et sa solution est encore *opaque*, car la relation entre les étapes successives n'est pas explicite.

Pour la sous-tâche b), d'abord il en fournit une reproduction fausse (Fig. 5) en comptant 39 pailles. Après relance de la chercheuse, il essaie de se corriger :

> Clément : On en aura plus parce que du coup, celle-là, on pourrait l'enlever et celle-là aussi, on pourrait l'enlever [en pointant la première paille de la deuxième et de la troisième ligne]. Du coup, je vais retrouver 20... 19, 18, du coup ça ferait 18... Oui, ça ferait 18.
>
> Chercheuse : Comment tu as fait pour trouver 18 ?
>
> Clément : Parce que là, du coup, s'ils seraient tous collés, je pourrais enlever celle-là parce que celle-là reviendrait là [il pointe la dernière paille de la première ligne et la première de la deuxième], et là pareil, je pourrais enlever celle-là, parce que celle-là, elle reviendrait là il pointe la dernière paille de la deuxième ligne]. Et du coup, j'ai fait ce que j'ai trouvé, qui était 20, moins 2.
>
> Chercheuse : Tu es sûr que c'était 20 ?

> Clément : Je sais plus... 1, 2, 3, 5, . . . 39 ! Du coup, 39 moins 2, ça fait 37.

Ici Clément a des difficultés liées à sa mémoire de travail, aspect qui peut poser problème aux élèves avec une dyscalculie. Il ne se rappelle pas correctement le nombre de pailles trouvé au préalable pour les 12 carrés. Malgré l'erreur qui fait aboutir au mauvais *résultat* 18, l'attention au *processus* qui amène l'élève à calculer 20–2 permet de percevoir son raisonnement correct.

Pour l'instant Clément n'a pas encore utilisé la structure de la suite, et il est assez concentré sur la *résolution* qui permet d'atteindre le *résultat*.

Pour la sous-tâche c) il propose d'abord la relation proportionnelle : « Là vu que sur une, il y en a 4, faire 100 fois 4... 400. » La chercheuse relance alors en proposant à l'élève de vérifier la conjecture pour 4 carrés. Clément se rend alors compte que sa stratégie est fausse :

> Parce que là, du coup, vu qu'ils sont collés... cette paille, on n'y en a pas encore une ici. Du coup ça fait pas exactement 4, mais ce qu'il faudrait faire c'est qu'il faudrait trouver combien y en a que j'ai trop compté là [en pointant 4x100=400], et faire 400 divisés par les paquets... Mais je ne sais pas comment trouver... Quel calcul faire pour trouver combien de pailles.

Dans l'extrait ci-dessus, on voit que Clément veut partir de sa formule fausse et trouver combien de pailles il a comptées en double. Les difficultés de Clément sont ici visibles, car il a de la peine à modéliser avec une soustraction la situation décrite : « mon problème c'est ça, justement, je ne sais pas quel calcul faire », dit-il quelques minutes plus tard, après avoir essayé de modéliser via une division. Le sens des opérations et leur lien avec le problème à modéliser ne sont pas stabilisés.

Pour aider Clément à trouver combien de pailles il a comptées en trop, la chercheuse lui propose de revenir sur les cas connus de la sous-tâche a). Ce qui est intéressant de ces cas à petits nombres est que le *résultat* a déjà été trouvé et l'attention est donc complètement tournée vers le *processus* utilisé pour l'obtenir, ce qui permet au résultat, écrit sous une de ses formes *non canoniques*, de devenir *transparent*. Le raisonnement sur les petits cas permet à Clément de répondre correctement à la sous-tâche c). Voici ses mots :

> Ok, je crois j'ai compris. . . Parce que là, à chaque fois. . . il y en aura de toute façon celle-là [en pointant à la première paille verticale]. Et puis là... Et puis du coup, là il manque, là il manque, là il manque, là il manque [en pointant les pailles verticales qui suivent] et on peut faire comme ça longtemps et je pense que jusqu'à 100 du coup. . . Là, du coup, j'ai trouvé que sur 4 pailles il y en avait... Sur 4 carrés de pailles il y en avait 3 où il manquait une paille et du coup, sur 5, c'était pareil. Et ainsi de suite. Et du coup, je me suis dit que sur 100, ça faisait pareil, qu'on pouvait faire comme ça jusqu'à 100. Du coup, ça faisait... il avait 99 pailles sur 100 qui manquaient dans chaque carré et du coup, j'ai fait 4 fois 100. Ça fait 400. En tout, il y a 4 fois 100 carrés. Et après j'ai fait 400 moins 99 et ça donnait 301 pailles. Et du coup il y aurait 301 pailles.

Dans ce qui précède, Clément compare sa formule 4x100 avec la suite de carrés et se rend compte qu'avec son calcul il compte deux fois toutes les pailles verticales sauf la première et la dernière. Il procède donc à soustraire ces 99 pailles aux 400 obtenues précédemment et il en obtient 301.

Malgré ses difficultés liées à la mémoire de travail et au choix de l'opération, Clément arrive à *généraliser* la suite aux 100 carrés et *argumente* son raisonnement. Cela a été possible grâce à l'attention portée au *processus* et non seulement au *résultat* et aux *représentations non canoniques* des nombres qui en ont permis une interprétation *transparente*.

Ambre

L'entretien avec Ambre commence avec la sous-tâche a), pour laquelle l'élève propose non pas la procédure attendue du dessin et comptage, mais décompose directement les carrés selon la structure de la suite. En écrivant le texte de la Fig. 6, elle dit :

> On a 4 pailles en haut, ensuite 4 pailles en bas [en écrivant "4" et "4" en "colonne"]. Puis, ensuite, on aura dans les intersections et on aura 3 intersections, celles-là, là [en pointant les pailles verticales, sauf

la première. Elle écrit "3" à côté des "4"]. Plus les 2 du bout, donc ça fait plus 2 [en écrivant "2" à côté du 3]. . . Ah, pour 5 carrés on fait la même chose, mais pour les 5. Du coup, il y en aura 5 en haut, 4 au milieu et toujours 2 sur les côtés [en écrivant "5" et "5" en colonne, "4" et "2" à côté des "5"]. Du coup, ce sera 16 [en écrivant "=16"] pailles.

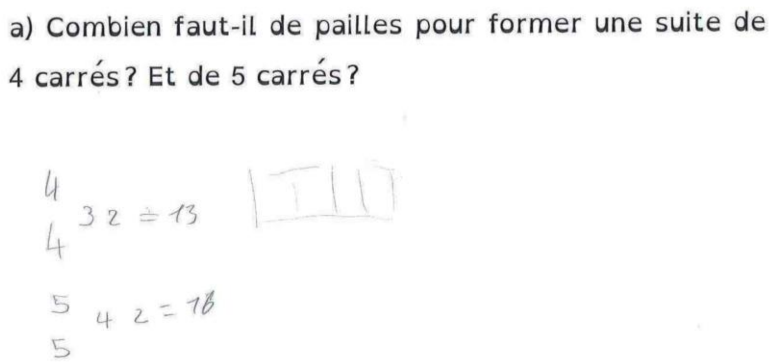

Fig. 6 : La résolution de la sous-tâche a) par Ambre

Malgré ses grandes difficultés en mathématiques, Ambre met spontanément en acte une procédure qui peut être considérée avancée du fait de son caractère *généralisable*. Nous faisons l'hypothèse que ses difficultés pourraient même défavoriser des procédures basées sur le comptage pour en favoriser d'autres s'appuyant sur la structure de la suite, où le *processus* pour arriver au résultat est *transparent* en son lien avec ce qu'il modélise. En effet, la manière adoptée par l'élève d'écrire les nombres en jeu (Fig. 6) peut être considérée comme une *représentation* qui communique des caractéristiques importantes de la suite. En fait, la position des nombres est liée à leur rôle dans la représentation graphique des carrés : les deux premiers nombres en colonne correspondent au nombre de pailles horizontales en haut et en bas, le deuxième nombre aux pailles verticales sauf la première et la dernière qui sont comprises dans le « 2 » final. Cette *représentation* de la suite permet à Ambre de la décomposer et d'avoir une vision *transparente* du nombre de pailles, qui est exprimé par une forme *non canonique*.

Ambre répète la même stratégie pour les 12 carrés, avec quelques erreurs de calcul et de modélisation de la situation, et propose à nouveau le même raisonnement pour les 100 carrés.

À la sous-tâche d), Ambre manifeste des difficultés. Pour la relancer, la chercheuse lui propose alors de trouver le nombre de pailles pour 5 000 carrés, un nombre encore plus grand que les 100 pour lesquelles elle avait aisément trouvé la solution. Étrangement, au lieu de reproposer la même résolution qu'auparavant, Ambre suggère une interprétation proportionnelle de la suite :

> 5 000 carrés... Si j'avais 5 000 carrés je ferais comme si j'avais 5 carrés. Et puis ensuite juste rajouter 3 zéros pour agrandir le nombre. Comme ça, c'est plus simple. . . Du coup, je ferais pour les 5 000, là, je fais 5 sur 5, 4 plus 2 [en écrivant "5" et "5" en colonne, après "4" et "2"]. 16, puis ensuite, on rajoute 3 zéros [en écrivant "16 000"]. Voilà

Ambre se rend compte ensuite que cette vision est erronée, après avoir trouvé un résultat différent grâce à la technique utilisée auparavant pour les 4, 5, 12 et 100 carrés :

> J'ai fait 5 000, puis 5 000, ça fait... Non ! Ça fait 10 000. . . Du coup, 15 000. Plus le 1 qui reste, ça fait 15 001 [en écrivant "=1 501"].

Dans l'explication ci-dessus on peut remarquer les difficultés que Ambre a pour coder en chiffres le nombre « quinze-mille-un ». Malgré ses difficultés, son raisonnement est correct et bien basé sur le *processus* et la structure à *généraliser*.

L'entretien se poursuit et à la sous-tâche d) Ambre propose une procédure très intéressante. Tout d'abord, il est question de nommer ce nombre de carrés pas fixé. Ambre trouve sa solution comme il suit (Fig. 7) :

> Si on prend le nombre en question... Je ne sais pas, je représente juste le nombre par un rond. . . En soi, le but du calcul, c'est de prendre 2 fois le nombre qu'on a… Moins ce nombre… Fin, moins 1 de ce nombre, plus ce qu'on a trouvé là, plus ensuite les 2 qui vont venir par la suite. Et on va trouver le nombre final.

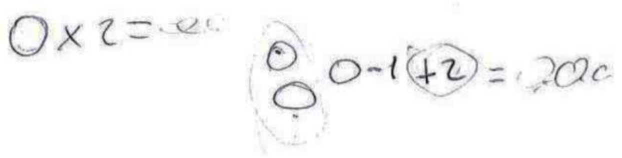

Fig. 7 : La résolution de la sous-tâche d) par Ambre

La *représentation* d'Ambre (Fig. 7) est remarquable pour son caractère *général* et son lien avec la géométrie de la suite. En effet, l'élève choisit d'introduire un symbole, « un rond », pour indiquer le nombre inconnu de carrés. Le symbole choisi n'est pas le langage littéral algébrique standard, mais il pourrait être tout à fait équivalent à celui-ci. En même temps, la disposition des symboles de la Fig. 7 est le même que celui dans la Fig. 6 et reprend la configuration spatiale des pailles : le nombre de carrés en haut, le nombre de carrés en bas, le nombre de carrés moins 1 pour les pailles verticales et 2 pour fermer le tout au début et à la fin.

Ambre a donc certes montré des difficultés liées à ses troubles, comme celle concernant le codage des nombres. Cependant, malgré les difficultés avérées par son diagnostic de dyscalculie, elle a très bien réussi dans la *généralisation* du problème et l'identification de sa structure, grâce à l'attention particulière à la *représentation* des données et aux choix numériques le plus possible *transparents*.

Conclusions

Dans la section précédente, nous avons présenté certains extraits de deux entretiens à des élèves avec MLD qui résolvent une tâche de généralisation en argumentant leurs propos mathématiques. Nous avons pu mettre en lumière certaines des difficultés typiques des personnes avec ce trouble : des erreurs de calcul, des difficultés liées à la modélisation, au codage-décodage des nombres et à la mémoire de travail.

Malgré les diagnostics reçus et les grandes difficultés constatées pendant toute leur scolarité, Clément et Ambre ont su résoudre une partie importante des sous-tâches proposées. En particulier, les difficultés de calcul avérées par les diagnostics de dyscalculie n'ont pas empêché de construire des raisonnements sur la structure du problème avec une attention particulière à sa représentation transparente et au processus pour le résoudre.

Cela révèle un potentiel de compétences des élèves avec MLD participant à cette étude. Le fait de proposer une tâche de *généralisation* pour laquelle le travail sur la *structure* et sa *représentation* était nécessaire et pour laquelle la simple *résolution* via le *produit* n'était pas suffisante a permis de mettre en lumière ce que ces deux élèves savaient faire, et non seulement leurs points de difficulté. Ce constat va dans la direction de la littérature en didactique des mathématiques qui préconise que tout apprenant, avec ou sans troubles, en difficultés ou non, a un potentiel mathématique à développer (Dias, 2014 ; Gregorio, 2022b).

Le travail sur la généralisation et l'argumentation peut donc être source d'un apprentissage mathématique qui s'avère particulièrement adapté pour certains élèves avec MLD car il permet de voir au-delà de certaines de leurs lacunes classiques, comme celles concernant les calculs, le codage des nombres, la mémoire de travail. Dans le cas de ces élèves, il paraît essentiel de stimuler ce potentiel mathématique à travers des tâches qui permettent de s'appuyer sur le *processus* nécessaire à sa *résolution* et à des *représentations transparentes* de la situation.

Cela semble capital pour deux raisons. D'abord, il est important de proposer aux élèves en difficulté des tâches dans lesquelles elles et ils peuvent réussir : dans le cas d'une dyscalculie, se limiter à des exercices de calcul minimise la possibilité de succès. En deuxième lieu, un travail en classe qui vise la structure, même celle de calculs, permet aussi aux élèves en difficulté de s'en approprier le sens. En effet, dans l'enseignement spécialisé –et avec les élèves en difficulté en général– on constate plus souvent la recherche de stabilisation d'automatismes (Roiné & Barallobres, 2018), mais sans une action explicite concernant la structure, seulement les élèves qui sont déjà en réussite arrivent à la repérer, ce qui les fait réussir encore plus et laisse les élèves en difficulté sans moyen. Si en classe nous avons l'impression de simplifier notre enseignement en proposant surtout des tâches visant l'obtention d'un résultat donc très axées sur la résolution, nous favorisons essentiellement une unique manière (souvent *canonique*) de représenter les quantités, nous devons garder à l'esprit que cette posture n'aide pas les élèves qui sont en difficulté, car elle vide de sens l'enseignement mathématique et en empêche par conséquent la compréhension.

REMERCIEMENTS

L'autrice souhaite remercier Thierry Dias pour ses remarques et commentaires précieux qui ont permis d'améliorer l'article.

BIBLIOGRAPHIE

American Psychiatric Association (APA). (2013). Specific Learning Disorder. In *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (3ème éd., p. 66-74). https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425596

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Robotti, E. & Santi, G. (2014). Juggling reference frames in the microworld Mak-Trace: the case of a student with MLD. Research Report in Nicol, C., Liljedahl, P., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 2*, pp. 81-88. Vancouver, Canada: PME.

Baccaglini–Frank, A., Di Martino, P. & Maracci, M. (2020). Dalla definizione di competenza matematica ai profili cognitivi e affettivi. Il difficile equilibrio tra ricerca di una definizione teorica dei costrutti e sviluppo di strumenti di osservazione e intervento. *XXXVII seminario nazionale di didattica della matematica "Giovanni Prodi"*. https://www.airdm.org/semnaz2020_relazione/

Batteau, V. & Clivaz, S. (2023). De la mise en commun à la mise en dialogue. *Revue de Mathématiques pour l'Ecole*, *239*, 27–39. https://doi.org/10.26034/vd.rm.2023.3624

Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2012). *Mathématiques 9-10-11. Livre 10e*. Editions LEP Loisirs et Pédagogie SA.

Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2022). *Mathématiques. Livre 7e*. MTL SA.

Département de la formation, de la jeunesse et de la culture (DFJC). (2019). *Concept 360°*. https://www.vd.ch/fileadmin/user_upload/organisation/dfj/dgeo/fichiers_pdf/concept360/Concept_360.pdf

Deruaz, M., Dias, T., Gardes, M.-L., Gregorio, F., Ouvrier–Buffet, C., Peteers, F. & Robotti, E. (2020). Exploring MLD in mathematics education: ten years of research. *Journal of Mathematical Behavior (The)*, *60*(60). https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100807

Dias, T. (2014). Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, (1), 151-161.

Geary, D. C. (2011). Consequences, characteristics, and causes of Mathematical Learning Disabilities and persistent low achievement in mathematics. *Journal of Develomental & Behavioral Pediatrics, 32*(3), 250–263. https://doi.org/10.1097/DBP.0b013e318209edef

Giroux, J. (2011). Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage en mathématiques. *Actes de colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, 148-158.

Gregorio, F. (2022a). *La pensée algébrique chez des élèves avec MLD (Mathematical Learning Disabilities) – Étude qualitative dans le secondaire* [Thèse de doctorat, Didactique des Mathématiques]. Université Paris Cité, Paris, France. http://hdl.handle.net/20.500.12162/6306

Gregorio, F. (2022b). The role of examples in early algebra for students with Mathematical Learning Difficulties. Dans G. Bolondi (dir.), *Actes de la Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. Retrieved from http://hdl.handle.net/20.500.12162/6486

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Éd.), *Algebra in the early grades* (p. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson & A. Laborde C. Pérez (Éd.), *8th international congress on mathematical education: Selected lectures* (p. 271-290). S.A.E.M. Thales.

Lewis, K. E. (2014). Difference Not Deficit: Reconceptualizing Mathematical Learning Disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(3), 351–396. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.3.0351

Lewis, K. E. & Fisher, M. B. (2016). Taking Stock of 40 Years of Research on Mathematical Learning Disability: Methodological Issues and Future Directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(4), 338-371. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.4.0338

Malara, N. A. & Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra tea- ching: Sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 51-78). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3

Pilet, J. & Grugeon–Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et Didactique*, *15*(2), 9-26. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580

Peteers, F. (2020). Apports croisés de la didactique et de la cognition numérique pour l'étude des troubles des apprentissages en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *40*(2), 225–270.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In Marja van den Hueuvel-Panhuizen (Éd.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 81-89).

Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds. The global evolution of and emerging field of research and practice. ICME13 & Springer.

Roiné, C. & Barallobres, G. (2018). Pensando con Pierre Bourdieu la categorización de los alumnos con dificultades. *Cadernos de Pesquisa*, *48*(170), 1168-1192. https://doi.org/10.1590/198053145362

Weber, A., Baud, É., Baetschmann, K., Molina, O., Reichen, V., Florey, V., Balegno, M., Clerc, A. & Clivaz, S. (2015). *Résolution de problèmes Les 99 carrés* (rapp. tech.). 3LS Laboratoire Lausannois Lesson Study. https://www.hepl.ch/accueil/recherche/laboratoires-hep-vaud/3ls/plans-de-lecon.html