CONVERSION DE REGISTRES AUTOUR DES FONCTIONS AFFINES AVEC GEOGEBRA

Gaëtan Cane, Jana Trgalova

Haute école pédagogique du canton de Vaud.

Résumé : Nous présentons une activité autour des fonctions affines avec GeoGebra en école professionnelle. Notre but est de montrer que le logiciel soutient la formulation et la vérification de conjectures en exploitant les changements de registres, permettant ainsi de rendre l'apprentissage des mathématiques plus actif.

Mots clés : Registre sémiotique, GeoGebra, fonction affine, secondaire 2.

INTRODUCTION

Cet article, issu du mémoire professionnel du premier auteur (Cane, 2024) encadré par le second, présente une activité concernant les fonctions affines. Cette activité a été mise en place dans une classe de deuxième année de maturité professionnelle, la majorité des élèves étant âgée de 18 ans. Destinés à des parcours professionnels, ces élèves suivent un enseignement des mathématiques principalement utilitaire, le plus souvent transmis selon une approche magistrale. Nous avons ainsi cherché à transformer la perception qu'ils ont des mathématiques, en les engageant plus activement dans leurs apprentissages. Nous avons alors fait le choix d'utiliser le logiciel GeoGebra, dans le but de favoriser une démarche de découverte active des propriétés des fonctions affines.

Dans un premier temps, nous exposons le cadrage théorique de notre recherche. Nous décrivons ensuite l'activité et procédons à l'analyse a priori d'une partie de cette activité. Elle se poursuit par l'examen des données empiriques. Enfin, la conclusion propose des pistes de réponse à la problématique formulée.

CADRAGE THÉORIQUE

Le cadrage théorique de notre étude s'articule autour de trois éléments : la notion de registre sémiotique de représentation, la notion de fonction et de fonction affine et enfin des apports d'outils numériques, et en particulier du logiciel GeoGebra, aux apprentissages mathématiques.

Registres sémiotiques de représentation

Selon Duval (1993), "les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dits "réels" ou "physiques"" (p. 38). Ainsi, les représentations sémiotiques d'objets mathématiques sont indispensables. Duval définit les représentations sémiotiques comme "des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement" (ibid., p. 39). Selon l'auteur, un système de représentation est un registre sémiotique s'il permet "trois activités cognitives fondamentales" (p. 41) : la formation d'une représentation, le traitement d'une représentation au sein d'un même registre et la conversion d'une représentation d'un registre dans un autre registre. L'intérêt de disposer de plusieurs registres de représentation pour un même objet mathématique est triple selon Duval (ibid.) : (1) selon la tâche demandée, le traitement peut s'avérer plus efficace dans un registre que dans un autre ; (2) toute représentation est partielle et d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects qui sont représentés ; et (3) la conceptualisation repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation. Par exemple, pour acquérir la notion de fonction, un élève doit avoir la capacité de passer de son expression algébrique à sa représentation graphique et inversement. Il est donc primordial de proposer aux élèves des activités jouant sur les changements de registres comme l'expliquent Duval (1993) et Hitt (1998). Cette vision rejoint la théorie de la variation de Marton (2014) selon laquelle il est fondamental de présenter un concept sous ses différentes représentations afin de pouvoir le dissocier de ses représentations.

Comme nous allons le montrer dans la suite, les fonctions et plus particulièrement les fonctions affines peuvent être représentées dans plusieurs registres de représentation, c'est pourquoi la notion de registre est essentielle pour notre étude.

Notion de fonction et de fonction affine

La notion de fonction est fondamentale en mathématiques, elle permet d'étudier et de comprendre des phénomènes de nombreux champs scientifiques (physique, biologie, ingénierie, *etc.*) et de la vie courante. Elle peut être représentée dans différents registres de représentation sémiotique comme le langage naturel, numérique, algébrique ou graphique.

La première définition du concept de fonction est due à Bernoulli : « On appelle fonction d'une variable une quantité composée de n'importe quelle forme par cette variable et par des constantes » (Hitt, 1998, p. 8). Dans cette définition, l'idée principale repose sur le fait qu'une fonction modélise une covariation entre deux quantités ; à une variation d'une quantité répond une variation sur la seconde. De plus, cette covariation peut être exprimée algébriquement comme une relation entre les quantités. Progressivement, la définition d'une fonction a évolué jusqu'à celle donnée en 1939 par Bourbaki :

> Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y, si quel que soit x dans E, il existe un élément y de F et un seul, qui soit dans la relation considérée avec x. (Bourbaki, 2006, p. E.R.5).

Cette définition est statique, à un élément d'un ensemble, on associe un élément d'un autre ensemble, l'approche covariationnelle présentée ci-dessus est laissée de côté.

Il est intéressant de noter que dans les moyens d'enseignement suisses romands, la définition de Bourbaki est reprise, comme le montre la Fig. 1.

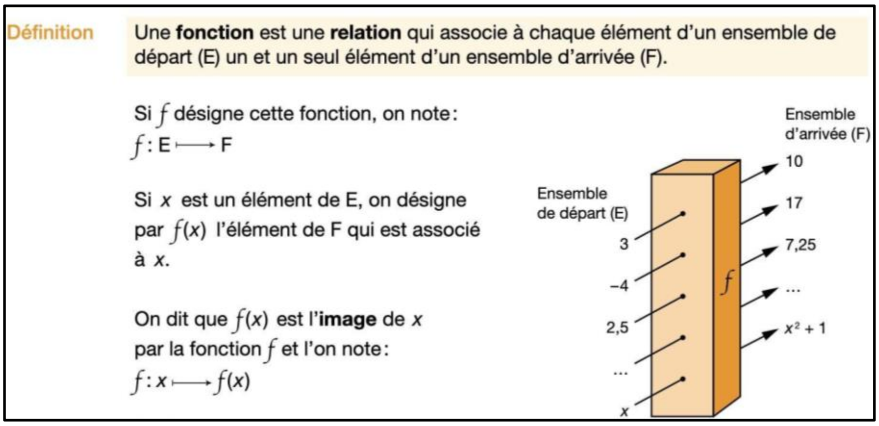


Fig. 1 : Extrait de l'aide-mémoire du Secondaire I concernant la notion de fonction (Corminboeuf et al., 2019, p. 48)

Concernant les fonctions affines, comme le montre la Fig. 2, elles sont identifiées avec leur expression algébrique, l'utilisation du verbe être suggère qu'une fonction affine ne peut être définie que par son expression algébrique. Par ailleurs, deux registres de représentation d'une fonction affine sont mentionnés : algébrique et graphique.

Définition	Une **fonction affine** est une fonction de la forme $x \longmapsto ax + b$ (a ; $b \in \mathbb{R}$). La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.

Fig. 2 : Extrait de l'aide-mémoire du Secondaire I concernant la notion de fonction affine (Corminboeuf et al., 2019, p. 48)

Dans son livre pour la maturité professionnelle, Jean-Pierre Favre définit une fonction affine de la manière suivante : « On appelle fonction affine, une fonction définie par : $f(x) = ax + b$ où les nombres a et b sont quelconques. » (2023, p. 150). Une nouvelle fois, on retrouve l'identification entre une expression algébrique et la fonction affine. L'aspect dynamique de la notion de fonction mis en avant par Bernoulli est inexistant ici et cela enferme les élèves dans une représentation purement algébrique de la notion de fonction affine entraînant des difficultés. En effet, depuis quelques années le niveau algébrique des élèves s'est effondré, par conséquent le calcul algébrique n'est pas un outil opérationnel pour les élèves ce qui a pour conséquence que ce registre n'est pas porteur de sens pour les élèves.

Enfin, comme évoqué précédemment, pour maîtriser un objet mathématique, l'élève doit être capable de travailler dans différents registres et surtout de passer d'un registre à l'autre. Or, comme les élèves travaillent dans plusieurs registres différents « sans que le passage de l'un à l'autre ne soit explicité » (Grau, 2017, p. 58), les registres semblent exister de manière indépendante ce qui rend difficile l'acquisition des savoirs par les élèves. Par exemple, il est difficile pour les élèves de comprendre quel impact aura un changement de la valeur du coefficient a sur l'allure de la représentation graphique de la fonction affine.

Ainsi, nous retenons les deux principales difficultés des élèves qui sont :

- la baisse des compétences des élèves dans le registre algébrique,
- la difficulté à effectuer des changements de registres.

Dans la section suivante nous précisons, en nous appuyant sur la littérature, pourquoi nous pensons que l'utilisation de GeoGebra en classe peut permettre d'atténuer certaines des difficultés mentionnées ci-dessus.

Logiciel GeoGebra

Les outils numériques ont pris de plus en plus de place dans notre quotidien, et dans le même temps, des logiciels de géométrie dynamique comme GeoGebra se sont beaucoup développés. La concordance de ces deux phénomènes laisse entrevoir une possibilité d'utiliser des outils numériques dans les classes pour l'enseignement, et en particulier celui des mathématiques. De nombreux travaux de recherche mettent en avant l'intérêt d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique en classe : par exemple, Tamam et Dasari (2021) ont réalisé une revue de littérature dans le but de montrer l'intérêt d'utiliser GeoGebra. Parmi les bénéfices retenus sont les suivants : la rapidité et l'exactitude des constructions géométriques, des expériences visuelles proposées aux élèves grâce aux fonctions d'animation et à l'utilisation du déplacement qui favorisent les apprentissages géométriques ou encore les rétroactions fournies lors du déplacement des objets permettant de valider des constructions. On peut également citer l'étude de Vandebrouck et Robert (2017) qui met en lumière le fait que GeoGebra facilite les changements de registres chez les élèves. Différentes études (Shadaan & Leong, 2013 ; Grau, 2017) tendent à montrer que l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique est bénéfique pour les apprentissages et permet non seulement aux élèves de comprendre plus globalement un concept mais également de mieux appréhender les changements de registres. De même Freiman et al. (2009), en appui sur diverses recherches portant sur GeoGebra, mettent en avant l'intérêt de son utilisation "comme environnement d'exploration active de structures mathématiques à l'aide de représentations multiples, ou pour montrer aux élèves des relations mathématiques qu'on ne peut pas « voir » dans un environnement papier crayon" (p. 45).

C'est pour ces raisons que, dans notre étude, nous avons choisi d'utiliser GeoGebra dans l'enseignement des fonctions affines au sein d'une classe de maturité professionnelle, en faisant l'hypothèse que ses apports au niveau de l'articulation de différents registres de représentation de fonctions affines pourront contribuer à dépasser les difficultés évoquées plus haut. Nous formulons alors notre question de recherche : En quoi le logiciel GeoGebra soutient-il l'activité de recherche de conjectures et de leur vérification concernant les fonctions affines en s'appuyant sur les changements de registres ?

Pour répondre à notre question de recherche, nous avons conçu une activité autour des fonctions affines mobilisant GeoGebra ; nous la présentons dans la suite.

CONCEPTION ET ANALYSE *A PRIORI* DE L'ACTIVITÉ

Dans cette section, nous présentons l'activité que nous avons conçue, puis nous réalisons l'analyse *a priori* d'une partie de cette activité en papier-crayon d'une part, puis avec GeoGebra, afin de mettre en évidence l'apport potentiel de l'outil.

L'activité est organisée en trois parties. La première partie a pour but d'introduire l'outil numérique aux élèves et d'insister sur la présence de deux registres de représentation de fonctions : algébrique et graphique. Elle propose de chercher les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes qui représentent deux fonctions affines. Les deuxième et troisième parties de l'activité visent à faire découvrir aux élèves les relations entre les pentes des droites perpendiculaires et parallèles en s'appuyant sur GeoGebra pour faciliter la recherche de ces relations en appui sur l'articulation entre les registres. L'activité telle qu'elle a été proposée aux élèves se trouve en Annexe A. En raison de contraintes d'espace, nous nous concentrons sur l'analyse de la deuxième partie de l'activité seulement.

Dans toute la suite, f et g désignent deux fonctions affines et leurs droites représentatives sont respectivement notées C_f et C_g. Tandis que la pente de la droite C_g est déterminée (elle vaut 4), celle de la droite C_f est variable. Une démarche possible, dans l'environnement papier-crayon, pour trouver la valeur de la pente de la droite C_f perpendiculaire à C_g, est d'identifier les vecteurs directeurs des droites et de calculer leur produit scalaire : ainsi, $\vec{u} = \binom{1}{4}$ et $\vec{v} = \binom{1}{a}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de C_g et de C_f. Leur produit scalaire est $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + 4a$. Or, on sait que le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est 0, donc $1 + 4a = 0$, d'où $a = -\frac{1}{4}$, ce qui peut conduire à la conjecture que la pente de C_f est l'opposée de l'inverse de la pente de C_g.

Une autre démarche consiste à construire un triangle ABC, avec le point A intersection des deux droites, le point C sur la droite C_g, le côté AB parallèle à l'axe des ordonnées et le côté BC parallèle à l'axe des abscisses. Ainsi, si on pose $a = AB$ et $b = BC$, la pente de la droite C_g est a/b (elle est positive car g est croissante). On construit ensuite le triangle A'B'C' comme l'image de ABC par la rotation de centre A et d'angle 90° (Fig. 3). Comme les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques, on en déduit que la pente de la droite C_f est $-b/a$ (le signe "$-$" est ajouté car la fonction f est décroissante, donc la pente de C_f est négative). Appliqué à notre exemple, ce résultat général permet de trouver que la pente de C_f est $-\frac{1}{4}$.

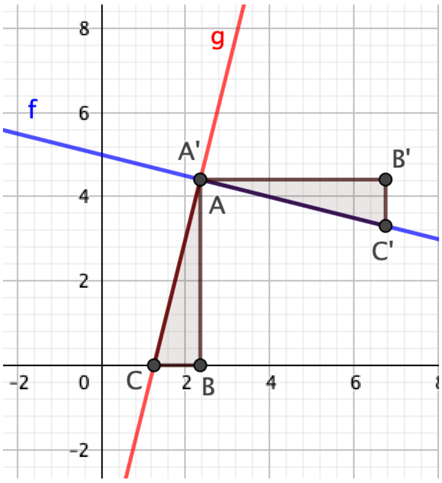


Fig. 3 : Représentation graphique des pentes des droites C_f et C_g

Dans l'environnement GeoGebra, la valeur de la pente de la droite C_f peut être modifiée à l'aide d'un curseur et on peut observer les effets sur la position de la droite. L'articulation dynamique entre les registres algébrique et graphique joue ici un rôle essentiel. Il est ainsi possible, en agissant sur le curseur (registre algébrique), de rendre la droite C_f perpendiculaire à C_g (registre graphique) et relever la valeur du curseur pour laquelle ce phénomène se produit. La valeur du curseur affichée est $-0{,}25$. La relation entre cette pente et la pente de C_g qui est 4 peut être plus délicate à conjecturer, car il faut "traduire" $-0{,}25$ en $-\frac{1}{4}$.

Notons également que, contrairement à la résolution en papier-crayon où la conjecture formulée est une implication (si les droites sont perpendiculaires, alors la pente de l'une est l'opposé de l'inverse de l'autre), la résolution avec GeoGebra donne accès à l'équivalence. En effet, on peut remarquer que tant que les droites ne sont pas perpendiculaires, la relation entre les pentes n'est pas vérifiée, ce qui montre que la perpendicularité des droites est aussi une condition nécessaire pour la relation entre les pentes.

Avec GeoGebra, cette conjecture devient accessible pour nos élèves, tandis qu'ils ne disposent pas de connaissances mathématiques en géométrie vectorielle, et leurs connaissances des isométries datant de plus de deux ans sont difficilement mobilisables pour leur permettre de résoudre ce problème sans l'outil numérique. Et comme notre volonté était de proposer une activité dans laquelle ces élèves seraient initiés à une démarche scientifique, le choix de GeoGebra s'est imposé.

Ainsi, à l'ouverture du fichier GeoGebra, les élèves disposent de deux droites, bleue et rouge, représentant les fonctions affines f et g respectivement (Fig. 4). Le curseur permet de varier les valeurs de la pente a de la droite représentant la fonction f.

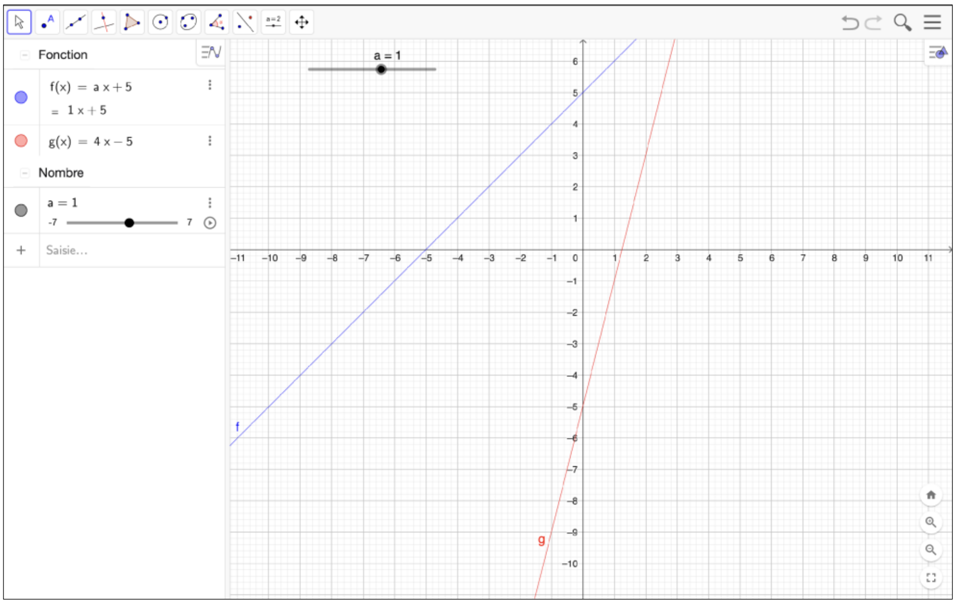


Fig. 4 : Capture d'écran de l'activité GeoGebra

Trois questions[1] sont proposées aux élèves (Fig. 5) :

> 3. Nous aimerions faire en sorte que les droites représentatives des fonctions f et g soient perpendiculaires. A l'aide de curseur, trouvez la **valeur exacte** de a pour laquelle ces deux droites sont perpendiculaires. Décrivez dans le cadre ci-dessous la démarche que vous avez utilisée pour obtenir la valeur de a et indiquez la valeur de a trouvée.
> 4. Lorsque les droites sont perpendiculaires, quelle est la relation entre les coefficients des pentes des droites représentatives de f et g ? Décrivez votre démarche le plus précisément possible dans le cadre ci-dessous.
> 5. Dans la fenêtre algébrique de GeoGebra, remplacez l'expression algébrique de la fonction g par g(x) = 2x - 5. En utilisant la relation trouvée à la question précédente, trouvez **algébriquement** la **valeur exacte** de a pour laquelle des droites représentatives de f et g sont perpendiculaires. Décrivez votre démarche le plus précisément possible dans le cadre ci-dessous. Vérifiez votre résultat avec GeoGebra.

Fig. 5 : Consignes données aux élèves

Pour répondre à la question 3, la procédure attendue est la suivante : traduire la perpendicularité par la présence d'un angle à 90° puis utiliser l'outil « Angle » de GeoGebra afin de faire apparaître l'angle aigu entre un point de C_f, le point d'intersection de ces deux droites et un point de C_g, comme le montre la Fig. 6. Par la suite, il est attendu que les élèves changent la valeur du curseur a jusqu'à obtenir un angle de 90° avant de lire la valeur exacte du curseur a. Cette procédure nécessite la coordination du registre algébrique (modification de la valeur de a et par conséquent l'expression algébrique de la fonction f) et le registre graphique (représentation graphique de la fonction f).

[1] Les questions 1 et 2 concernent la première partie de l'activité qui n'est pas développée dans cet article.

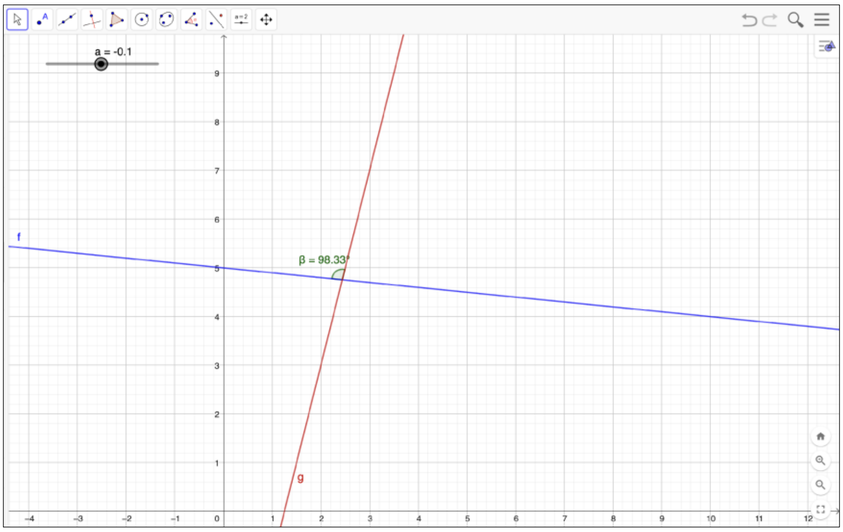


Fig. 6 : Utilisation de l'outil « Angle » de GeoGebra pour répondre à la question 3

Nous pouvons nous attendre à des difficultés techniques liées à l'utilisation de GeoGebra, en particulier l'utilisation de l'outil « Angle », une démonstration technique pourra être réalisée par l'enseignant pour lever ces difficultés. Une autre difficulté anticipée est relative à la manipulation du curseur. Comme la valeur attendue est $-0{,}25$, obtenir cette valeur demande une certaine dextérité. Les élèves peuvent toutefois s'appuyer sur la rétroaction visuelle sous forme de l'affichage de la valeur de l'angle. D'autres procédures sont anticipées et des relances préparées en conséquence : par exemple si les élèves se contentent de contrôler la perpendicularité des droites perceptivement, nous avons préparé la relance suivante : « Comment être sûr que les droites sont perpendiculaires ? », dans le but de pousser les élèves à penser à traduire la perpendicularité en la présence d'un angle à 90° entre les droites.

La question 4 demande de conjecturer la relation entre les deux pentes. La pente 4 pour la droite C_g a été choisie pour faciliter la conjecture. Nous supposons en effet que les élèves identifient la relation entre 4 et $-0{,}25$ en reconnaissant l'écriture décimale de la fraction $-\frac{1}{4}$. Une relance est toutefois prévue au cas où les élèves n'y pensent pas spontanément : nous leur demanderons d'écrire la valeur du curseur trouvée sous la forme d'une fraction.

Dans la question 5, un autre exemple est proposé pour amener les élèves à vérifier leur conjecture. Il est attendu que les élèves, en s'appuyant sur la relation conjecturée, proposent $-0{,}5$ comme la valeur du curseur a, comme la pente de la droite C_g est 2, et qu'ils vérifient avec GeoGebra que pour cette valeur la droite C_f est effectivement perpendiculaire à C_g.

ANALYSE *A POSTERIORI* DE L'ACTIVITÉ

Dans cette section, nous présentons le déroulement de cette partie de l'activité et procédons à l'analyse des données recueillies.

Déroulement effectif de la séance sur les droites perpendiculaires

L'activité a été mise en place pendant deux périodes[2] consécutives dans une classe de seize élèves de deuxième année de maturité professionnelle orientée économie et services, qui suivaient des cours de préparation à la maturité professionnelle en parallèle de leur certificat fédéral de capacité d'employé de

[2] On rappelle qu'une période d'enseignement compte 45 minutes.

commerce. Les élèves ne disposaient d'aucun cours de géométrie au sein de leur programme et n'avaient pas étudié la notion de fonction depuis la fin de l'école obligatoire.

Le déroulé général de ces deux périodes fut le suivant : la première période, traitant des deux premières parties de l'activité, s'est déroulée dans une salle informatique où les quatorze élèves présents étaient répartis, de manière autonome, en huit groupes : six binômes et deux élèves ayant travaillé seuls, chaque groupe disposant d'un ordinateur. La première partie de l'activité sur l'intersection des droites ayant pris plus de temps que nous ne l'avions planifié, la dernière partie de l'activité portant sur les droites parallèles a donc été réalisée en deuxième période, durant laquelle la classe s'est déplacée dans une salle où les élèves ne disposaient plus d'ordinateurs (l'enseignant avait néanmoins la possibilité de projeter l'écran de son ordinateur) ; cette dernière partie a été traitée de manière collégiale avant de procéder à une institutionnalisation : l'enseignant posait des questions à la classe afin de faire émerger le savoir, le logiciel GeoGebra étant manipulé par l'enseignant sur les consignes des élèves.

Dans notre analyse *a priori* nous avions envisagé des difficultés pour les élèves à utiliser le logiciel GeoGebra car ils ne le connaissaient pas, il s'est avéré qu'un seul groupe en a rencontré.

Données recueillies

Lors de la première période, l'enseignant disposait pour chaque partie de l'activité d'une grille d'observation (un extrait de celle concernant les droites perpendiculaires est présenté dans la Fig. 7) qu'il remplissait en passant dans les rangs. Cette grille contenait une première colonne précisant le numéro des groupes, les colonnes suivantes reprenant quant à elles les procédures anticipées dans l'analyse *a priori*. L'avant-dernière colonne permettait à l'enseignant de prendre en note des procédures non prévues et la dernière permettait à l'enseignant de faire des commentaires une fois l'activité terminée.

Groupe	Procédure géométrique	Lecture GeoGebra	Utilisation de l'outil « Angles »	Autres procédures / commentaires	Commentaires après l'activité
1					
2					

Fig. 7 : Exemple d'une grille d'observation

Cette période a été filmée, ce qui a permis de retranscrire précisément les mises en commun. Malheureusement, pour des raisons techniques, il n'a pas été possible d'enregistrer la seconde période.

Durant la séance, chaque groupe devait remplir une fiche de l'activité qui était récupérée par l'enseignant en fin de séance.

Analyse des données récoltées concernant les droites perpendiculaires

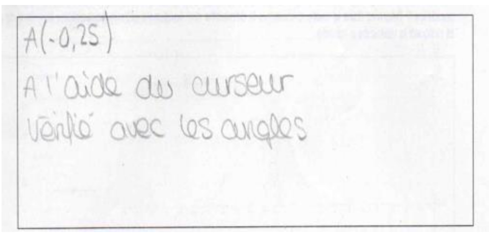
Durant cette partie, les élèves ont disposé d'un temps de réflexion pour avancer sur les questions 3, 4 et 5 avant que nous ne procédions à une mise en commun. La grille d'observation complète de cette partie est présentée en Annexe B.

Analyse des données pour la question 3

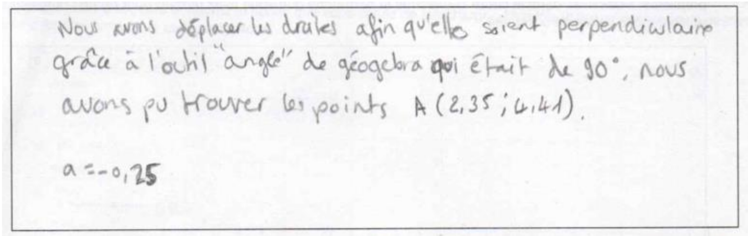
Quatre groupes (1, 2, 3 et 6) ont procédé comme nous l'avions anticipé. Ils ont déplacé le curseur du paramètre a jusqu'à obtenir des droites qui semblaient perpendiculaires visuellement. Lors de ses passages dans les rangs, l'enseignant a demandé aux élèves comment ils pourraient être sûrs que les droites étaient bien perpendiculaires. Les groupes 1, 3 et 6 ont indiqué qu'ils savaient que deux droites perpendiculaires se coupent en formant un angle droit. L'enseignant a donc réalisé une démonstration technique à ces différents groupes pour afficher l'angle puis leur a demandé d'essayer de répondre à la question 4. Le groupe 2 quant à lui n'a pas pensé à utiliser l'angle droit et s'est contenté d'une « résolution visuelle ».

Pour deux groupes 4 et 7, la propriété était déjà connue et ils ont immédiatement choisi la valeur correcte pour le paramètre a dans cette question mais également dans la question 5.

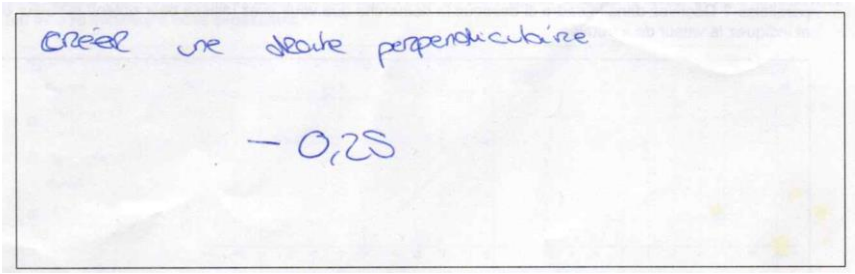
Enfin, les groupes 5 et 8 ont mobilisé une procédure qui n'était pas attendue : tout d'abord, ils ont utilisé GeoGebra pour tracer la perpendiculaire (notée d) à C_g passant par le point d'intersection entre C_f et C_g. Une fois la perpendiculaire obtenue, ils ont bougé le curseur a afin que C_f et d soient confondues. Enfin, ils ont noté la valeur du paramètre a. Cette procédure est correcte et a permis aux élèves de déterminer la valeur exacte du paramètre a. Contrairement à celle du groupe 2, cette procédure utilise une propriété mathématique et permet de déterminer avec certitude la valeur du paramètre, en coordonnant les registres graphique et algébrique. En effet, pour être sûr que les droites sont confondues (constat visuel dans le registre graphique), on peut regarder les équations de celles-ci dans la fenêtre de GeoGebra (registre algébrique) et s'assurer qu'elles sont identiques. Ainsi, si on omet les groupes 4 et 7 qui connaissaient la relation et le groupe 2 qui s'est contenté d'une représentation visuelle, l'ensemble des groupes a réussi à déterminer la valeur de la pente de la droite C_f. Nous présentons dans la Fig. 8 des extraits des productions des groupes 1, 5 et 6.


A(-0,25)
A l'aide du curseur
vérifié avec les angles

a


Nous avons déplacer les droites afin qu'elle soient perpendiculaire grâce à l'outil "angle" de géogebra qui était de 90°, nous avons pu trouver les points A (2,35 ; 4,41).
a = -0,25

b


Créer une droite perpendiculaire
-0,25

c

Fig. 8 : Réponse des groupes 6 (a), 1 (b) et 5 (c) à la question 3.

ANALYSE DES DONNÉES POUR LA QUESTION 4

Concernant la question 4, seuls deux groupes ont réussi à conjecturer la relation entre les pentes des droites lorsque celles-ci sont perpendiculaires : les groupes 2 et 3. Il est probable que le fait que GeoGebra n'affiche pas la valeur du curseur sous forme fractionnaire ait été un handicap pour réaliser la conjecture. On peut également supposer qu'il était très difficile pour les élèves d'arriver à conjecturer la relation à partir d'un seul exemple.

Dans cette question, les élèves ont rencontré une difficulté que nous n'avions pas anticipée. En effet, dans la consigne de la question 4, le mot 'coefficient' a posé un problème à de nombreux groupes car ils ne comprenaient pas ce que ce mot signifiait alors qu'il était utilisé en classe depuis le début de la séquence. Il a été nécessaire que l'enseignant interrompt la classe afin de préciser le vocabulaire. *A posteriori*, nous aurions plutôt dû utiliser le mot 'paramètre' dans la consigne de la question 4 et l'enseignant aurait dû insister sur ce vocabulaire durant le premier cours concernant les fonctions.

ANALYSE DES DONNÉES POUR LA QUESTION 5

Le groupe 7 a vérifié la propriété conjecturée en répondant à la question 5, c'est le seul groupe qui a eu le temps d'arriver jusqu'à cette étape.

MISE EN COMMUN

Comme tous les groupes avaient trouvé la valeur du paramètre a, l'objectif de la mise en commun fut de trouver la relation entre la valeur du paramètre a et la valeur de la pente de C_g.

L'enseignant a donc écrit au tableau : $a = -0{,}25$ et $g(x) = 4x - 5$. Nous retranscrivons une partie de cette mise en commun dans la Fig. 9. Nous pensons que cette dernière est intéressante car elle permet de montrer qu'avec quelques relances de la part de l'enseignant, les élèves ont eu la capacité d'émettre la conjecture attendue en se basant sur les résultats trouvés avec GeoGebra. Cela sous-entend qu'en améliorant l'activité, ils auraient la capacité de le faire sans intervention directe de l'enseignant.

Enseignant : Moi ce que je vous demande de trouver, c'est une relation entre ça (*l'enseignant encadre* $a = -0{,}25$) et ça (*l'enseignant encadre* 4). Vous pouvez dire ce qui vous passe par la tête, tant que c'est relié aux maths.

Élève B : $0{,}25$ c'est le quart du 4.

Enseignant : $0{,}25$ c'est le quart du 4. C'est-à-dire ? Qu'est-ce que vous entendez par le quart du 4 ?

Élève B : Un sur quatre.

Enseignant : Donc ce n'est pas le quart du quatre mais c'est l'inverse. Donc on me dit que $0{,}25$ c'est $\frac{1}{4}$ (*l'enseignant écrit l'égalité au tableau en même temps qu'il parle*). Mais nous on n'a pas $0{,}25$ mais $-0{,}25$.

Élève C : Donc c'est moins un sur quatre.

Enseignant : Exact ! Donc maintenant comment je relie $-\frac{1}{4}$ à 4 en une phrase, qu'est-ce que je peux dire ?

Élève D : C'est l'inverse mais avec un moins devant.

Enseignant : Exact ! Donc les droites sont perpendiculaires et les pentes sont inverses et opposées.

Fig. 9 : Extrait de la mise en commun de la deuxième partie de l'activité

On remarque que la pluralité des échanges a permis la construction du savoir car les différentes interventions des élèves ont permis de conjecturer le résultat. Ceci n'a été possible que parce que tous les groupes ont réussi à trouver la valeur de a dans la question précédente et ont pu réfléchir à la relation cherchée. Par manque de temps, l'enseignant n'a laissé qu'une minute à tous les élèves de la classe pour réfléchir à la question 5. À la suite de ce temps de réflexion, l'ensemble de la classe indiqua que la valeur du coefficient était $-0{,}5$ et lorsque l'enseignant a demandé aux élèves : « Comment pourrions-nous être sûrs que les droites sont perpendiculaires ? », les élèves ont répondu que nous pouvions utiliser GeoGebra. Cet élément fût repris en début de la seconde période avec une manipulation de l'enseignant pour montrer que, dans ce cas, les droites étaient perpendiculaires car nous observions un angle de 90°. L'institutionnalisation de cette partie a eu lieu en fin de seconde période et a été présentée comme dans la Fig. 10.

- Les droites représentatives de f et g sont perpendiculaires si et seulement si :

$f(x) = a \cdot x + b$ et $g(x) = -\frac{1}{a} \cdot x + c$

Fig. 10 : Présentation de l'institutionnalisation de la propriété de perpendicularité

Il est intéressant d'analyser le dialogue de l'enseignant, lors de sa troisième intervention il dit : « Donc ce n'est pas le quart du quatre mais c'est l'inverse ». Il aurait mieux valu que l'enseignant prenne le temps d'expliquer que « un sur quatre » ne veut pas dire le quart du quatre et qu'il finisse son intervention en indiquant qu'il s'agit de « son inverse » et ne pas dire « c'est l'inverse » qui sous-entend que $\frac{1}{4}$ est l'inverse du quart du quatre.

Conclusion

L'étude présentée dans cet article concerne l'enseignement des fonctions affines à des élèves de deuxième année de maturité professionnelle. Dans le but de rendre ces élèves actifs et de les engager dans une démarche de découverte de certaines propriétés mathématiques, nous avons choisi d'utiliser le logiciel GeoGebra. Nous avons en effet fait l'hypothèse que ce logiciel, favorisant une mise en relation dynamique de registres algébrique et graphique, faciliterait la formulation et la vérification de conjectures.

Les résultats que nous avons exposés montrent que tous les élèves ont réussi à trouver la pente de la droite perpendiculaire à une droite donnée. Nous pensons que l'utilisation du curseur a qui permettait à la fois de changer la pente de la droite représentative et l'expression algébrique de la fonction, coordonnant ainsi les deux registres, a facilité cette recherche. De ce point du vue le logiciel a joué un rôle déterminant. Cependant, il s'est avéré difficile pour les élèves de conjecturer la relation entre les pentes de deux droites perpendiculaires. Cette difficulté pourrait s'expliquer par le fait que dans GeoGebra, les coefficients dans l'écriture algébrique de l'équation de la droite sont écrits sous forme décimale, ce qui rend l'identification de la relation entre les deux pentes complexe. Cette limite du logiciel a dû être comblée par l'enseignant et la conjecture a été finalement trouvée collectivement lors de la mise en commun. Une autre explication possible à cette difficulté est le fait qu'un seul exemple a été proposé, à cause des contraintes temporelles et institutionnelles (salle informatique disponible pendant une seule période). En explorant plusieurs exemples, il aurait été certainement plus aisé d'en inférer la relation cherchée.

Comme nous l'avons mentionné, lors de la mise en commun concernant la seconde partie de l'activité, les élèves ont spontanément proposé d'utiliser GeoGebra pour vérifier si les conjectures émises étaient correctes. Nous avons également utilisé le logiciel durant la troisième partie de l'activité concernant les pentes de droites parallèles et durant les exercices réalisés collégialement après l'activité pour lever des incertitudes ou des incompréhensions. Ces observations tendent à montrer que GeoGebra favorise les démarches de vérification de conjectures. En effet, les élèves ont semblé apprécier le fait de pouvoir vérifier leurs résultats à l'aide du logiciel, en appui sur les deux registres de représentation articulés.

Ainsi, il nous semble que l'activité mise en place donne des indices suggérant que le logiciel GeoGebra favorise la réalisation et la vérification de conjectures. De plus, l'utilisation du curseur a par les élèves a permis non seulement d'articuler les registres graphique et algébrique mais également d'entrer dans une démarche de preuve concernant le parallélisme dans la troisième partie de l'activité. En effet, même si aucune preuve mathématique n'a été mise en œuvre ici, le raisonnement suivant fût mis en place sur le parallélisme : d'abord mettre en relation, dans le registre graphique, le parallélisme de deux droites avec la non-existence de point d'intersection, puis utiliser GeoGebra pour constater que les droites n'avaient plus de point d'intersection (ce qui se traduit par l'affichage de points d'interrogation à la place des coordonnées du point d'intersection), puis utiliser le registre algébrique pour déterminer l'existence ou non d'un tel point afin d'en conclure sur la nature des deux droites. Nous étions agréablement surpris par la proposition d'un tel raisonnement, car les élèves n'étaient pas coutumiers de ce type de démarche mathématique. Il semble donc que les élèves aient réussi spontanément à articuler les registres ce qui témoigne d'une meilleure compréhension du concept de fonction et nous pensons que GeoGebra a aidé à la réalisation de cela. Enfin, il est intéressant de noter que peu d'élèves ont rencontré des difficultés sur l'utilisation du logiciel GeoGebra.

Néanmoins, notre expérimentation a mis en lumière certaines limites qui peuvent avoir impacté les résultats. Compte tenu de nos analyses, nous proposons d'améliorer l'activité de manière à ce que plusieurs exemples soient à disposition des élèves. Cela peut être rendu possible en introduisant un second curseur, représentant la pente de la droite C_g. On pourrait demander aux élèves de trouver, pour différentes valeurs de ce curseur, la valeur du paramètre a pour que les droites soient perpendiculaires. Ainsi, les élèves disposeraient de plusieurs exemples, ce qui faciliterait la conjecture souhaitée. De plus, le fait de faire faire plusieurs exemples aux élèves renforcerait l'esprit de démarche scientifique que nous avons tenté de mettre en place au sein de cette activité. Cela pourrait également contribuer à dépasser la limite du logiciel GeoGebra qui ne permet pas d'écrire sous forme de fractions les valeurs d'un curseur.

Bibliographie

Bourbaki, N. (2006). *Éléments de mathématique : Théorie des ensembles*. Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-34035-5

Cane, G. 1. (2024). *Utilisation de GeoGebra dans une séquence d'enseignement sur les fonctions affines*. Mémoire professionnel, HEP Lausanne.

Corminboeuf, I., Mante, M., & Schild, H. (2019). *Mathématiques 9-10-11 : aide-mémoire : savoirs, savoir-faire et stratégies. Loisirs* et pédagogie.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Favre, J.-P. (2023). *MATHS pour la matu pro* (sixième édition). Promath Éditions.

Grau, S. (2017). *Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Thèse de doctorat. Université Bretagne Loire. https://hal.science/tel-01629911v1/document

Hitt, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*, 7-26. https://bibnum.publimath.fr/IST/IST98002.pdf

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning.* Routledge.

Shadaan, P., & Leong, K. E. (2013). Effectiveness of Using GeoGebra on Students' Understanding in Learning Circles. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, *1*(4), 1-11. https://eric.ed.gov/?id=EJ1086434

Soury-Lavergne, S. (2020). *La géométrie dynamique pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques*. Paris : CNESCO-CNAM. https://hal.science/hal-03853287/

Tamam, B., & Dasari, D. (2021). The use of Geogebra software in teaching mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, *1882*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1882/1/012042

Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *37*(2–3), 333–382. https://hal.science/hal-01766851/

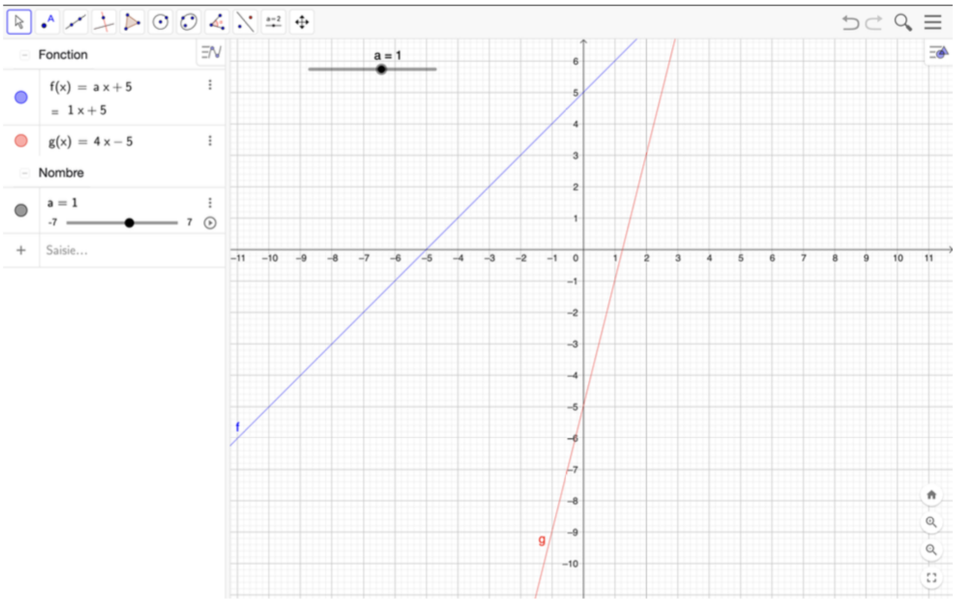
ANNEXE A : ACTIVITÉ GEOGEBRA

Fonctions | EPCA | Activité Geogebra

ACTIVITÉ GEOGEBRA DU 17.05.24

Numéro de groupe :

Consignes pour lancer l'activité : Allez sur Teams et dans le dossier « GeoGebra » téléchargez le fichier $activite$. Lancez le logiciel Geogebra et ouvrez le fichier que vous venez de télécharger. Une fois le fichier ouvert, vous devriez voir une fenêtre similaire à celle ci-dessous.



Sur la gauche de la fenêtre graphique vous trouverez une fenêtre algébrique où sont notés tous les objets définis. À ce stade, vous trouverez les expressions algébriques de deux fonctions f et g données respectivement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + 5 \quad \text{et} \quad g(x) = 4x - 5$$

Dans l'expression algébrique de f, a est un paramètre que vous pouvez bouger en manipulant le curseur de la fenêtre graphique.

i) Faites varier la valeur de a en utilisant le curseur puis décrivez de la manière la plus précise possible vos observations.

ii) À l'aide de *l'outil point*, placez le point d'intersection entre les droites représentatives des fonctions f et g.

©Gaëtan Cane

Page 1/ 4

Intersection des deux droites :

1) Placer le curseur à la valeur $a = 1$. Quelles sont les **coordonnées exactes** du point d'intersection des deux droites ? Décrivez votre démarche le plus précisément possible dans le cadre ci-dessous.

2) On suppose dans cette question que $a = -1$. En utilisant la méthode développée à la question précédente, déterminez **algébriquement** les coordonnées du point d'intersection des droites représentatives de f et g. Décrivez votre démarche le plus précisément possible dans le cadre ci-dessous.
Vérifiez votre résultat avec GeoGebra.

Droites perpendiculaires :

3) Nous aimerions faire en sorte que les droites représentatives des fonctions f et g soient perpendiculaires. À l'aide du curseur trouvez la **valeur exacte** de a pour laquelle ces deux droites sont perpendiculaires. Décrivez dans le cadre ci-dessous la démarche que vous avez utilisée pour obtenir la valeur de a et indiquez la valeur de a trouvée.

4) Lorsque les droites sont perpendiculaires, quelle est la relation entre les coefficients des pentes des droites représentatives de f et g ? Décrivez votre démarche le plus précisément possible dans le cadre ci-dessous.

5) Dans la fenêtre algébrique de GeoGebra remplacez l'expression algébrique de la fonction g par $g(x) = 2x - 5$. En utilisant la relation trouvée à la question précédente, trouvez, **algébriquement**, la **valeur exacte** de a pour laquelle les droites représentatives de f et g sont perpendiculaires. Décrivez votre démarche le plus précisément possible dans le cadre ci-dessous. Vérifiez votre résultat avec GeoGebra.

Droites parallèles :

Dans la fenêtre algébrique de GeoGebra remplacez l'expression algébrique de la fonction g par son expression initiale, c'est-à-dire $g(x) = 4x - 5$.

6) Pour finir cette activité nous aimerions comprendre quelle valeur doit avoir le paramètre a pour que les droites représentatives de f et g soient parallèles. Quelle est la **valeur exacte** de a pour que ces deux droites soient parallèles ? Décrivez dans le cadre ci-dessous la démarche que vous avez utilisée pour obtenir la valeur de a et indiquez la valeur de a trouvée.

7) Lorsque les droites sont parallèles, quelle est la relation entre les coefficients des pentes des droites représentatives de f et g ? Décrivez votre démarche le plus précisément possible dans le cadre ci-dessous

8) Dans la fenêtre algébrique de GeoGebra remplacez l'expression algébrique de la fonction g par $g(x) = 2x - 5$. En utilisant la relation trouvée à la question précédente, déterminez, **algébriquement**, la **valeur exacte** de a pour laquelle les droites représentatives de f et g sont parallèles. Décrivez votre démarche le plus précisément possible dans le cadre ci-dessous. Vérifiez votre résultat avec GeoGebra.

ANNEXE B : GRILLE D'OBSERVATION DE LA SECONDE PARTIE DE L'ACTIVITÉ

Partie 2 : Droites perpendiculaires

Groupe	Procédure géométrique	Lecture GeoGebra	Utilisation de l'outil « Angles »	Autres procédures / commentaires	Commentaires après l'activité
1		V	V		
2		V			La relation a été trouvée.
3		V	V		La relation a été trouvée.
4		V			La relation était connue.
5				Outil perpendiculaire.	Ils ont utilisé l'outil puis lu la valeur de a.
6		V	V		
7		V		Vérif OK	La relation lui a paru logique.
8		V	V	Outil perpendiculaire.	

V : sans relance   V : avec relance   V : méthode alternative