INTRODUCTION DE L'ALGEBRE EN 9H AVEC DES PROBLEMES DE GENERALISATION

Amine Slim, Sylvie Coppé

Enseignant au Secondaire 1 – Établissement Léon-Michaud, Université de Genève- Équipe DiMaGe

Cet article vise à explorer les conditions favorables à une introduction à l'algèbre qui approfondit la compréhension et la signification des symboles algébriques. Nous avons élaboré une séquence d'enseignement axée sur des problèmes de généralisation et de preuves à destination d'élèves de 9H, dans le but de développer des compétences algébriques. Dans cet article, nous analysons leurs procédures concernant trois problèmes de généralisation en nous focalisant sur les évolutions de l'arithmétique vers l'algèbre.

Mots clés : algèbre élémentaire, problèmes de généralisation, distributivité de la multiplication sur l'addition, procédures élèves.

Dans le cadre des programmes de mathématiques de l'école obligatoire, l'algèbre, forte de son héritage historique significatif (Squalli, 2000), pose des défis considérables pour les élèves et les enseignants, en termes d'enseignement et d'apprentissage. Ses transformations et ses transitions épistémologiques, marquées par le passage (Kouki & Hassayoune, 2015) d'un registre oral (algèbre rhétorique) à un registre écrit (algèbre symbolique), d'une approche empirique à une pratique générale, peuvent expliquer les difficultés inhérentes à son enseignement. La recherche menée par Wang (2015) sur les difficultés rencontrées en algèbre illustre certaines de ces difficultés : à travers l'analyse de 29 articles de chercheurs anglo-saxons, l'auteur identifie 15 éléments interconnectés, allant de la transition de l'arithmétique à l'algèbre, à la gestion de la lettre en passant par le rôle pédagogique de l'enseignant et l'organisation des contenus d'enseignement. Ces éléments constituent autant de raisons qui expliquent la difficulté de la mobilisation de l'algèbre par les élèves comme l'avait souligné Chevallard (1985). La Suisse romande ne fait pas exception (Hosseinian, 2021), peut-être aussi parce que l'enseignement semble privilégier le formalisme algébrique (aspects calculatoires et procéduraux) au détriment d'une véritable compréhension des concepts mathématiques. Ces constats sont à l'origine de notre recherche faite lors d'un mémoire de master en didactique des mathématiques[1], soutenu en juin 2023, qui avait pour thème l'élaboration d'une séquence d'enseignement d'introduction de l'algèbre basée sur la résolution de problèmes et utilisant principalement des problèmes de généralisation et de preuves[2]. Nous l'avons expérimentée avec des élèves de 9H en voie prégymnasiale (VP) du canton de Vaud. Dans cet article, nous présentons des résultats concernant l'analyse des productions d'élèves sur les problèmes de généralisation, les problèmes de preuves donneront lieu à un second article.

L'objectif de la séquence est de rendre les concepts enseignés significatifs et de montrer l'utilité de l'algèbre aux élèves. En effet, selon Kieran (2004), une grande partie de la construction du sens des objets algébriques se produit au sein des problèmes de généralisation. En analysant les travaux de 24 élèves, nous cherchons à comprendre comment cette approche peut renforcer la capacité des élèves à appréhender les outils symboliques en algèbre. Notre hypothèse est qu'en procédant ainsi, les élèves prendront conscience de la nécessité de l'utilisation d'un outil symbolique, ce qui facilitera l'introduction et l'usage de la lettre.

[1] Étude d'une séquence sur l'introduction au calcul littéral à l'aide de problèmes de généralisation et de preuve en 9e Harmos - Master en didactique disciplinaire du 2Cr2D (HEP Vaud – Unige).

[2] À noter que dans le canton de Vaud les problèmes de généralisation et de preuves sont généralement enseignés en 10H ou 11H.

Cet article se structure en cinq parties. La première examine les approches d'enseignement de l'algèbre et l'importance de l'intégration de problèmes de généralisation. La seconde donne quelques éléments de contexte de l'enseignement de l'algèbre en Suisse romande. Nous décrivons ensuite la séquence puis la méthode utilisée pour analyser les données recueillies. Enfin, dans la dernière partie, nous présentons une analyse des processus de généralisation employés par les élèves.

QUELQUES ÉLÉMENTS SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE

Dans cette partie nous faisons un rapide tour d'horizon de quelques travaux en didactique de l'algèbre qui nous ont servis dans nos analyses. Chevallard (2006) indique que l'entrée dans l'algèbre est un vrai « problème de la profession », état de fait constaté depuis plus de 40 ans par de nombreuses recherches. Selon Bronner (2019), l'entrée dans l'algèbre est souvent synonyme de « coup de force » du professeur, car l'utilisation d'une « lettre » est fortement suggérée (voire imposée) aux élèves sans qu'ils puissent découvrir et comprendre la nécessité et l'utilité de la « lettre » à travers des problèmes. Cette confrontation initiale avec l'algèbre soulève donc la question de la méthodologie d'enseignement, invitant à une réflexion plus profonde sur la manière dont nous abordons les concepts algébriques et plus particulièrement comment nous envisageons le développement de compétences algébriques. En cela, nous avons choisi de suivre les conclusions des travaux de Grugeon (1997) sur les compétences nécessaires pour maitriser l'algèbre élémentaire, structurées en deux dimensions, les dimensions « objet » et « outil » (au sens de la dialectique outil/objet de Douady (1986)). La dimension « objet » est associée à la manipulation d'objets mathématiques tels que les expressions littérales et les équations, considérant l'algèbre comme un ensemble structuré d'objets avec leurs représentations, méthodes de transformations et propriétés uniques. Dans la dimension « outil », l'algèbre est utilisée comme moyen de résoudre des problèmes impliquant la généralisation, la preuve ou encore la résolution d'équations. Or il s'agit d'équilibrer ces deux aspects alors que quelquefois c'est l'aspect « objet » qui est prépondérant.

D'autres travaux abordent les questions de transitions entre l'arithmétique et l'algèbre. Vergnaud (1988, 1989) met l'accent sur les ruptures entre l'arithmétique et l'algèbre, la première portant sur la différence entre les processus mentaux pour résoudre des problèmes de façon arithmétique ou algébrique, la seconde sur un changement de paradigme dans le statut de certains objets comme le signe égal, les signes opératoires (même objet, mais signification différente), point de vue repris dans les travaux de Kieran (1992) au travers de la notion de fausse continuité.

Assude et al. (2012) mettent en évidence le rôle essentiel de la distributivité de la multiplication sur l'addition comme un outil clé de justification pour légitimer la manipulation des expressions littérales et déplorent que le statut et la formulation de cette propriété soient souvent peu clairs dans les manuels scolaires, voire remplacés par des ostensifs comme des flèches ou couleurs ou expressions non mathématiques (par exemple, « on transforme », « on distribue », etc.).

Ces travaux et bien d'autres soulignent la complexité de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre, mettant en lumière la nécessité d'approches pédagogiques qui facilitent non seulement l'introduction de nouveaux concepts algébriques, mais aussi l'acquisition de compétences pour leur manipulation et leur application dans la résolution de problèmes. Pour équilibrer le travail entre ces deux dimensions et enrichir la compréhension des nouveaux objets mathématiques ainsi que des techniques de calcul, Bednarz et al. (1996) ont proposé quatre approches didactiques d'entrée dans l'algèbre :

- Une approche par la généralisation des modèles numériques et géométriques et des lois régissant les relations numériques (par la production de formules) ;
- Une approche par la résolution de problèmes (par les équations) ;
- Une approche par la modélisation de phénomènes physiques et mathématiques ;
- Une approche technologique / fonctionnelle (via des logiciels).

Ces différentes approches ne s'opposent pas et il existe un consensus au sein de la communauté scientifique soutenant l'idée d'un équilibre entre ces quatre approches nécessaire à la compréhension en profondeur de la « fonction, structure et fonctionnement » de la pratique de l'algèbre (Bednarz et al., 1996). Mais l'approche par généralisation s'est révélée être plus facilitatrice pour l'entrée dans l'algèbre que les autres approches (Larguier, 2015; Radford, 2014). Forts d'un tel constat étayé par la recherche, nous nous sommes penchés sur les intentions du curriculum de Suisse romande en matière de problèmes de généralisation en algèbre.

QUELQUES ÉLÉMENTS SUR LE CONTEXTE DE LA SUISSE ROMANDE

En Suisse romande, les objectifs d'apprentissage du secondaire 1 sont définis par le Plan d'Études Romand (PER). Ses intentions quant à l'algèbre sont situées dans la partie MSN 33 « Fonction et Algèbre » et détaillées dans la composante 5 « Résoudre des problèmes numériques et algébriques en mobilisant l'algèbre comme outil de calcul (équations), de preuve ou de généralisation ». On constate donc que les différents types de problèmes sont cités.

Dans le canton de Vaud (puisque c'est là que notre expérimentation a eu lieu) les préconisations sur l'enseignement de l'algèbre en nombre de périodes par année mettent en évidence une focalisation en 10H et 11H, après une brève introduction en 9H (seulement 10 périodes). L'algèbre est l'un des domaines qui reçoit la plus faible dotation horaire en 9H. Cela signifie donc que l'enseignement de l'algèbre est principalement fait sur deux années, ce qui nous pose question vu la complexité de ce thème.

Nous avons également analysé les Moyens d'Enseignement Romands (MER) (voir annexe 1). Ceux-ci semblent favoriser la résolution d'équations et la notion de fonction tout au long du cycle, laissant de côté les problèmes de généralisation et de preuves, surtout en début de cycle. De plus, on constate que l'algèbre est massivement travaillée dans sa dimension « objet » notamment en 9H, où l'accent est mis sur les techniques de calcul en intégrant peu la résolution de problèmes, ce qui montre une approche formelle de l'algèbre.

En prenant en compte ces constats, nous avons donc élaboré et expérimenté une séquence d'introduction à l'algèbre en introduisant des problèmes de généralisation et de preuves. C'est ce que nous présentons dans la section suivante.

LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Cette séquence repose sur un ensemble de 7 séances non isolées (voir annexe 2). Elle est constituée de 4 phases. Dans la première (2 séances), nous avons travaillé le calcul réfléchi (voir annexe 3), car nous avons souhaité vérifier que les élèves avaient une maitrise suffisante de la distributivité de la multiplication sur l'addition utilisée dans le cadre numérique pour ensuite présenter la distributivité comme une des propriétés permettant de justifier les transformations des expressions littérales (Alves et al., 2013). Cela nous permettait également de travailler sur le statut de l'égalité, en passant du signe qui indique un processus de calcul à un signe qui représente une relation d'équivalence. Ce travail est nécessaire et s'il n'est pas fait, cela peut devenir un obstacle à l'entrée dans l'algèbre comme le soulignent ces autrices :

> Dans son aspect « réfléchi » le calcul mental … opère sur des nombres et permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés (commutativité, associativité, distributivité). C'est ainsi qu'au Collège, il va devenir un moyen de préparation des compétences algébriques. » (Piolti-Lamorthe & Roubin, 2010, p. 3).

Dans cet article, nous n'analysons ni les tâches proposées dans cette phase ni les productions des élèves, mais nous soulignons l'importance de ce travail pour la séquence.

La seconde phase, séances 3 et 4, porte sur les problèmes de généralisation. Elle est composée du problème des « Carreaux colorés »[3] dans les deux versions ci-dessous. Ce problème a été employé et analysé à maintes reprises par le passé (Bednarz, 2005; Coppé et al., 2016; Coulange & Grugeon, 2008; Denis et al., 2004; Vlassis et al., 2017; Vlassis & Demonty, 2002) et ses potentialités pour l'introduction de formules, la généralisation et l'introduction de la lettre ont été soulignées.

La 3e phase, séances 5 et 6, qui porte sur les programmes de calculs et la notion de preuve fera l'objet d'un autre article.

La 4e et dernière phase est une évaluation, réalisée deux semaines après la dernière séance. Y figurent des exercices sur la distributivité de la multiplication sur l'addition, un problème de généralisation et deux de preuve. Le problème de généralisation est constitué d'une suite de figures géométriques auxquelles sont associées des « étapes ». Ces figures sont formées par des assemblages d'objets dont le nombre augmente à chaque étape. Il s'agit d'un problème de dénombrement au sens de Krysinska et al. (2009) : manipulation de structures discrètes, identification et modélisation de régularités, double lecture itérative et « fonctionnelle » (généralisation en langage algébrique).

ANALYSE A PRIORI DES 3 PROBLÈMES

Les deux problèmes travaillés durant la séquence (CC1 et CC2) diffèrent par le nombre et la nature des questions permettant d'arriver à la généralité. Il s'agit de trouver le nombre de carreaux colorés de la bordure, quel que soit le nombre de carrés du côté du carré.

Problème CC1 $_{S3-4}$

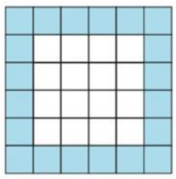
Tu as un carré de côté 6 carreaux dans lequel des petits carreaux sont colorés.

a. Pour ce carré de côté 6, tu peux savoir combien de carreaux sont colorés. Si on a un carré de côté 10, combien de petits carreaux sont colorés ?
b. Si on a un carré de côté 100, combien de petits carreaux sont colorés ?
c. Trouve une formule, un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux colorés pour n'importe quel carré.
d. Les expressions possibles obtenues lors de l'activité 1 sont :

$4n - 4$	$4(n - 1)$	$n + n - 1 + n - 1 + n - 2$
$n + n + n - 2 + n - 2$	$4(n - 2) + 4$	$n^2 - (n - 2)^2$

Comment montrer que ces expressions sont égales pour n'importe quelle valeur du côté du carré ?

e. Question supplémentaire : Arié pense que le nombre de carreaux colorés est toujours un multiple de 4. VRAI ou FAUX ? Prouve-le !

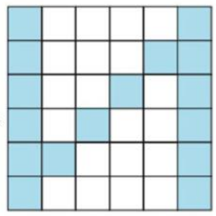


Quatre bords colorés.

Problème CC2 $_{S3-4}$

Tu as un carré de côté 6 carreaux dans lequel des petits carreaux sont colorés.

a. Trouve une formule, un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux colorés pour n'importe quel carré.



Deux bords opposés et une diagonale colorés.

Fig. 1 : Les 2 problèmes de généralisation travaillés durant la séquence

Le problème CC1 est structuré autour de cinq questions ciblant des objectifs spécifiques. La question « a » a pour but d'engager les élèves dans le problème. Les questions « b » et « c » encouragent la création de formules. Ces trois questions sont données ensemble. Puis une mise en commun est organisée pour partager l'ensemble des formules produites. Et cela débouche sur une première institutionnalisation.

[3] Adaptation de la situation d'apprentissage emblématique « le carré bordé » de Combier et al. (1996).

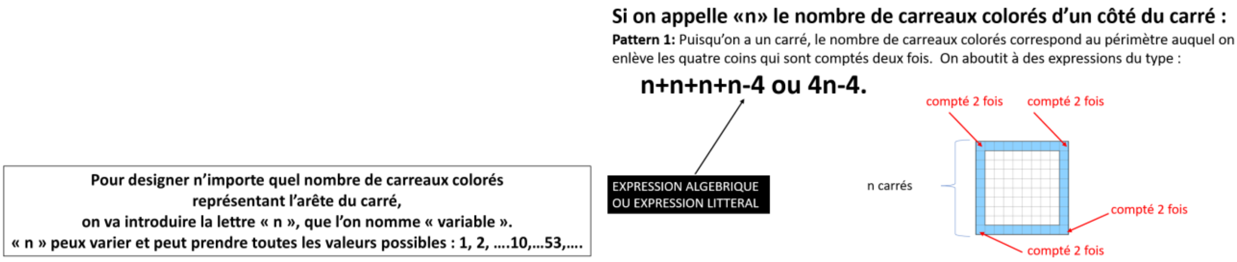


Fig. 2 : Trace écrite de l'institutionnalisation en séance 3

À la suite de cette institutionnalisation, les 6 formules de la question « d » sont introduites et on demande alors d'explorer leurs équivalences notamment en mobilisant la distributivité. Enfin la cinquième question initie une réflexion sur l'aspect structurel de l'écriture algébrique. L'énoncé est conçu pour engager les élèves dans un processus de recherche impliquant des méthodes d'essais-ajustements, de conjectures, de généralisation et de validation, grâce à un jeu sur la variable didactique « le nombre de carreaux d'un côté du carré ». Les valeurs de cette variable sont 6, 10 et 100. Pour les deux premières valeurs, les élèves peuvent compter les carreaux colorés directement, mais la valeur 100 rend le comptage inefficace, suggérant l'utilisation d'une méthode différente. Les valeurs 10 et 100 ont été volontairement choisies pour détecter si les élèves mobilisaient systématiquement la proportionnalité (et donc la mettre en défaut ici).

Les stratégies valides envisageables sont :

- Stratégie D (peu probable pour 100) : Dessiner et compter les carreaux.
- Stratégie P : Identifier des structures ou motifs répétitifs (patterns) qui se généralisent avec l'augmentation de la taille du carré.
- Stratégie R (même si elle est peu probable au vu de l'énoncé puisqu'un seul carré est donné) : en envisageant la suite des carrés, utiliser l'itération, en ajoutant 4 carreaux colorés pour chaque augmentation de la taille du carré.

Pour la stratégie P, voici les divers motifs qui amènent à des méthodes de calcul différentes et des formules différentes dont l'équivalence pourra être montrée en utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition (Figure 3).

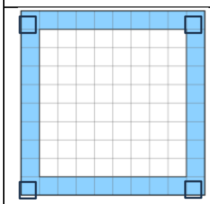
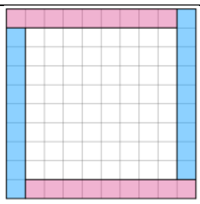
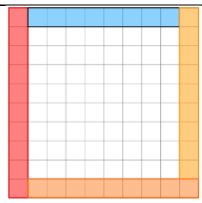
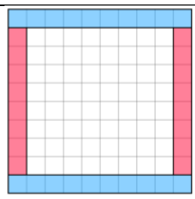
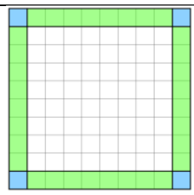
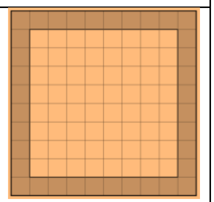
Pattern P1	Pattern P2	Pattern P3	Pattern P4	Pattern P5	Pattern P6
					
N = 4n-4	N = 4·(n-1)	N = n+2·(n-1)+ n-2	N = 2n + 2·(n - 2)	N = 4·(n - 2) + 4	N = n^2 - $(n - 2)^2$

Fig. 3 : Récapitulatif des différents patterns et des formules du problème CC1

Dans la question « c », les élèves sont invités à formuler une expression générale sans exigence sur la forme. Ils peuvent choisir d'utiliser le langage naturel ou des expressions mathématiques, avec ou sans lettres ou avec des symboles ou abréviations qu'ils auront choisis. On voit que plusieurs expressions sont possibles, reflétant la diversité des stratégies de calcul.

Le problème de généralisation CC2 est un réinvestissement du problème CC1 à ceci près qu'il ne contient qu'une question. Il est immédiatement demandé aux élèves de trouver une formule et donc de recourir à la lettre. La configuration est plus complexe que le problème CC1, nécessitant une analyse des relations entre les bords et la diagonale qui nécessite souvent une réorganisation des carrés de la diagonale.

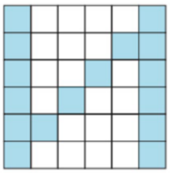
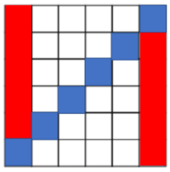
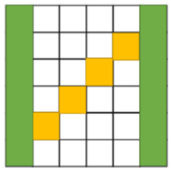
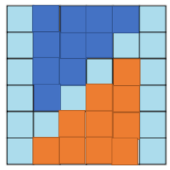
Pattern P1’	Pattern P2’	Pattern P3’	Pattern P4’
			
On déplace les carreaux de la diagonale sur un côté N = 3n - 2	N = 2(n-1) + n	N = 2n + (n-2)	N = n² - (n - 1) × (n - 2)

Fig. 4 : Récapitulatif des différents patterns et des formules du problème CC2

Le problème posé en évaluation diffère des deux autres, car l’observation des étapes successives joue un rôle clé dans le raisonnement. Il favorise une double lecture : itérative (ajout progressif) et globale (expression de la généralité algébrique). On peut penser que la stratégie R sera davantage utilisée ici conformément aux travaux de Krysinska & al. (2009) et que la progression arithmétique qui en découle est un des deux « modèles fonctionnels plus aisément accessibles » aux élèves.

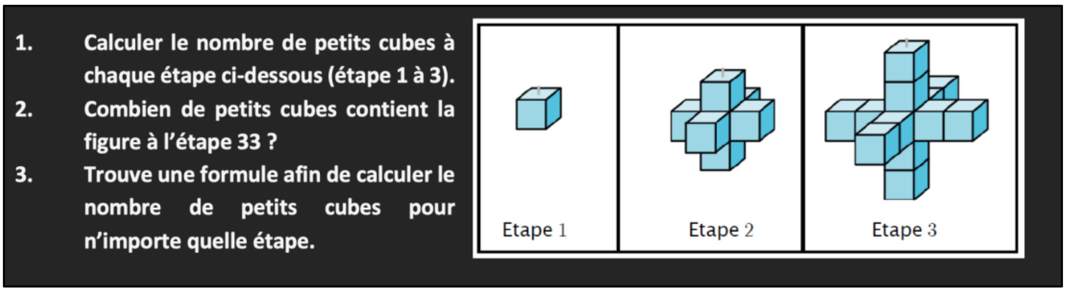


Fig. 5 : Le problème d’évaluation

On peut envisager les mêmes stratégies que pour CC1 et CC2, mais :

- La stratégie D nous parait encore plus improbable que pour les deux autres problèmes vu la forme du motif et la difficulté de faire un dessin ;
- La stratégie R consistant à comprendre comment on passe d’une étape à l’autre en ajoutant 6 cubes (un sur chaque face du cube de l’étape 1) nous parait ici bien plus probable que pour CC1 et CC2 puisque les étapes 1, 2 et 3 sont données. On aura ainsi 1 cube à l’étape 1, 1+6 cubes à l’étape 2 et 1+6 +6 cubes à l’étape 3. Pour la généralisation, il s’agira ensuite de mettre en lien le nombre de 6 (n) et le numéro de l’étape E comme suite n=E-1, ce qui constitue une difficulté supplémentaire pour construire la formule N=1+6(E-1) ;
- La stratégie P pourra également être mise en œuvre en considérant par exemple, l’étape 3 comme une figure générique (il y a un cube de moins que l’étape sur chaque face du cube initial et on rajoute le cube initial).

En résumé, les trois problèmes présentent des approches distinctes de la généralisation et de la modélisation. CC1 repose sur l’identification de patterns et guide les élèves à travers des questions intermédiaires qui structurent leur réflexion. CC2, bien qu’il mobilise également l’identification de patterns, ne propose pas de guidage explicite, rendant la tâche plus ouverte et potentiellement plus difficile. Enfin, le problème du cube est centré sur une structure itérative qui peut inviter à une lecture locale (ajout progressif), mais sans guidage explicite pour aider les élèves à passer à une généralisation algébrique.

Analyse des productions d’élèves

Notre objectif principal est d’observer comment des problèmes de généralisation peuvent favoriser une entrée dans l’algèbre chez les élèves dont nous analysons les productions écrites individuelles. Pour cela nous avons utilisé les indicateurs issus du travail de Larguier (2015) sur le raisonnement mathématique en situation de résolution de problèmes de généralisation et de preuve, au moment d'introduire l'algèbre. Elle y observe un déplacement de ce qu'elle nomme une pensée arithmétique, où le résultat est fonction exclusivement des données initiales, vers une pensée algébrique (même si nous ne reprenons pas ce terme de « pensée ») caractérisée par plusieurs dimensions : la détection de régularités structurelles, l'intégration de grandeurs non explicitement données, le dépassement du contexte immédiat afin de formuler des expressions générales via les règles du calcul algébrique (telles que l'application de la distributivité), etc. Elle identifie sept étapes intermédiaires entre la pratique de la généralisation arithmétique et la généralisation algébrique, qui reflètent le processus d'apprentissage et de transition des élèves de l'arithmétique à l'algèbre. Ce passage n'est pas instantané, mais se fait progressivement, en développant certaines compétences et en comprenant des concepts clés.

Pensée arithmétique ⟷ Pensée algébrique

A	B	C	D	E	F	G
Cas particuliers pris comme exemples	Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	Exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage des lettres

Fig. 6 : Grille d'analyse des productions d'élèves (Larguier, 2015)

Dans l'analyse des deux problèmes CC1 et CC2, l'étape A correspond à une stratégie de type D, reposant sur des représentations visuelles des carrés de tailles croissantes. Cette approche, bien qu'utile en phase exploratoire, limite le raisonnement à des cas particuliers ou proches du carré de taille 6. L'étape B est marquée par une stratégie R, fondée sur une logique d'itération. Cette lecture est nécessaire, mais non suffisante pour atteindre une généralisation complète. L'étape C signe les prémices d'une entrée dans la généralisation algébrique. À ce stade, les élèves commencent à formuler une règle ou un pattern qui peut s'appliquer à n'importe quelle taille de carré, mais souvent en utilisant un exemple générique comme support. Pour atteindre l'étape D, qui marque une généralisation fonctionnelle, les élèves doivent convoquer deux objets mathématiques essentiels : le nombre total de carreaux colorés et le nombre de carreaux colorés d'un côté. Cela nécessite de dépasser les représentations spécifiques en construisant une relation entre ces objets, souvent à travers des patterns. Ces patterns peuvent être exprimés sous différentes formes, telles que des dessins, des descriptions en langage naturel, des abréviations, ou encore des lettres qui ne sont pas directement liées aux mots du langage courant.

Dans l'analyse du problème des cubes, l'étape A, correspondant à une stratégie de type D, s'efface au profit de l'étape B, en raison de la nature géométrique de la figure à dessiner. A l'étape B, les élèves identifient une régularité dans l'ajout progressif des cubes et formulent une règle additive locale, comme E = E-1 + 6. Le traitement de ce problème diffère des précédents, car il peut être analysé comme une situation qui illustre pleinement la nécessité d'une double algébrisation (Krysinska et al., 2009) : définir N, le nombre total de cubes, comme une variable dépendante, et E, le numéro de l'étape, comme une variable indépendante est essentielle pour passer d'une simple lecture itérative à une modélisation globale (étapes D et suivantes). Cela nécessite de dépasser quelques obstacles comme distinguer clairement les deux variables et comprendre que N dépend de E et non l'inverse.

RÉSULTATS

Nos résultats portent sur l'analyse des productions des élèves sur les trois problèmes de généralisation présentés ci-dessus. Le nombre d'élèves présents durant la séquence a été de 22 ou 23 selon les séances.

Initialement prévue pour être entièrement gérée par l'enseignante de mathématique (étudiante en sciences de la nature), la séquence a finalement été conduite en coenseignement afin de gérer efficacement les processus de régulation. Les élèves ont principalement travaillé de façon individuelle pour résoudre les problèmes.

Analyse du problème CC1

Pour ce problème nous n'analysons que les réponses aux questions « a », « b » et « c » (les questions « d » et « e » n'ayant pas d'équivalent dans les deux autres problèmes). Seulement 8 copies sur 22 indiquent un nombre de carreaux correct pour le carré de côté 6, ce qui est étonnant puisqu'il suffisait de compter les carreaux. De nombreuses erreurs ont été commises (6 élèves ont trouvé 36 CC,[4] car 6 x 6 = 36 ou 24 CC, résultat de 4 x 6), ce qui montre également que les élèves n'ont pas vérifié. Les erreurs sont probablement liées aux effets de contrat didactique de type arithmétique « avec les exercices sur le calcul réfléchi, on a fait des opérations alors la solution s'obtient par une seule opération » ou de type géométrique « calcul d'aire » au lieu du « calcul du périmètre ».

Pour le carré de côté 10, 15 élèves ont trouvé le résultat correct. De nouveau ils n'ont pas mobilisé le comptage, car ils n'ont dessiné ni le carré de côté 10 ni des carrés de tailles intermédiaires de 6 à 10 (le processus itératif n'étant pas convoqué comme indiqué dans l'analyse a priori). Pour les élèves qui ont réussi, le nombre de CC pour le carré de côté 10 a été exclusivement générée par la mise en évidence de patterns à partir du dessin du carré de côté 6 et de premières généralisations s'appuyant sur un exemple générique (type C de Larguier).

Sur 22 élèves présents, 15 élèves ont repéré au moins un des patterns que nous avions prévus et il est à noter que 4 élèves ont utilisé entre 3 et 6 patterns. Ci-dessous la répartition selon les différents patterns montre que les élèves ont activement cherché. Le pattern P1 domine tous les autres suivis par les patterns P4 et P6.

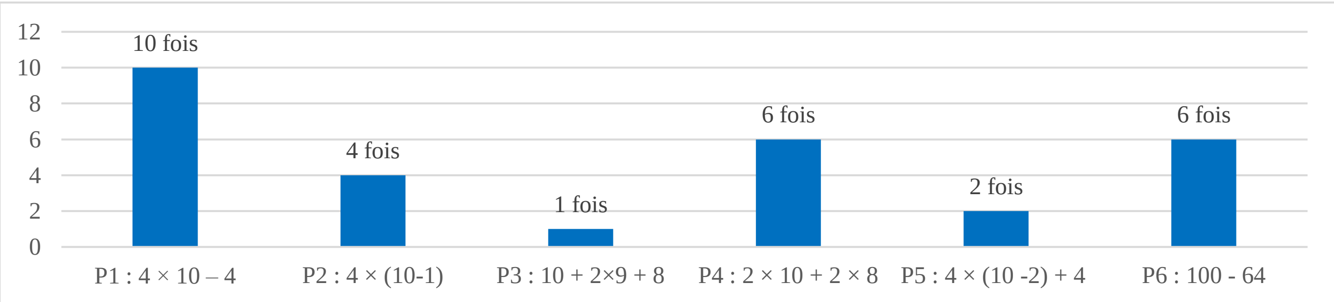


Fig. 7 : Fréquence d'apparition des différents patterns pour le problème CC1 pour le carré de côté 10

Le passage au carré de côté 100 a engendré quelques erreurs de calcul comme 100·100 = 1000 ou (100·4) - 4 = 96. En réinvestissant le travail sur les patterns appliqués au carré de 10, 13 élèves ont donné un résultat juste. Nous n'avons pas constaté l'erreur attendue sur la proportionnalité.

Pour la question « c », dans un premier temps, les élèves ont produit peu de formulations générales. Nous avons dû faire une régulation visant à faire expliciter aux élèves ce qui était attendu sous le terme formule et nous avons obtenu une évolution significative des réponses.

Voici donc l'ensemble des formulations produites pour la question c. Il est à noter que certaines ont été utilisées par plusieurs élèves, qu'un même élève a pu en produire plusieurs et que certains des élèves n'ont pas été en mesure de produire des formules. Nous avons pu inférer le pattern utilisé avec la formule produite.

[4] CC : Carreaux colorés.

	Formules (telles qu'écrites sur les copies)	Patterns	Commentaires
F1	$x \cdot 4 = y$ $y - 4 = z$	P1	• 3 lettres / 3 variables $x,\ y$ et z • Absence de la définition des variables • Formule en 2 parties qui correspond à un procédé de calculs
F2	$(x \times y) - 4$	P1	• 2 lettres, mais une seule réelle variable • Absence de la définition des lettres
F3	$x \cdot y\ -\ y$ y = nombre de côtés = 4 x = nombre de carreaux par côté	P1	• 1 lettre-variable, 1 lettre-constante
F4	(F4.1) $n \cdot 4\ -\ 4$	P1	• 2 formules similaires • F4.2 nomme la variable dépendante (nc) ce qui n'apparait pas dans F4.1
	n = nombre de carreaux sur 1 coté, nc = nombre de carreaux colorés (F4.2) $n \cdot 4 - 4\ =\ nc$	P1	
F5	NC et NCT $NC - 1\ =\ NC - 1\,x\,4\ =\ NCT$	P1	• 2 abréviations • Utilisation du signe égal comme « résultat »
F6	Il faut faire tous ces côtés additionné moins 4 Je compte tous les côtés et je retire les 4 des coins	P1	• 2 formules similaires avec du vocabulaire synonyme. • Langage naturel sans symbole mathématique • Donne un procédé de calcul
F7	Nombre de carrés d'un bord · 4 et après avec le résultat – 4	P1	• Langage naturel associé à des symboles mathématiques • Donne un procédé de calcul
F8	☺ · 4 - 4	P1	• Ostensif dans un registre non conventionnel
F9	On doit voir combien fait un côté de un carré, mais si on fait $\times$ 4 on contera deux fois les carreaux des côtés donc : $4\ \times\ n - 4 =$ (n=nombre de carrés d'un bord)	P1	• Langage naturel associé à des symboles mathématiques • Procédé de calcul
F10	$(n - 1) \cdot 4$	P2	• 1 lettre variable x • Absence de la définition de la variable
F11	$v - 1 = w$ et $w \cdot 4 = r$	P2	• 3 lettres / 3 variables v, w et r • Absence de la définition des variables
F12	$(x - 1) \cdot y,\qquad y = nombre\ de\ cotés$	P2	• 1 lettre-variable, 1 lettre-constante
F13	$x + 2 \cdot (x - 1) + (x - 2)$	P3	• 1 lettre-variable
F14	$(n \cdot 2) + (n - 2) \cdot 2$ $x \cdot 2 + ([x - 2] \cdot 2)$	P4	• 2 formules similaires (lettres différentes) • Respectivement sans et avec définition de la variable
F15	Il faut faire 2 · le nombre de carreaux d'un côté + 2 · le nombre de carreaux d'un côté en enlevant 2	P4	• Langage naturel associé à des symboles mathématiques • Procédé de calcul
F16	$(x - 2) \cdot y + y$ y = nombre de côtés	P5	• 1 lettre-variable, 1 lettre-constante
F17	$P^2 - (P - 2)^2$	P6	• 1 lettre -variable (P) • Absence de la définition de la variable P et n
F18	$n \cdot n - (n - 2)^2$ $x \cdot x - (x - 2)^2$	P6	

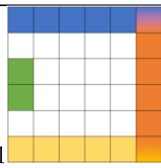
F19	$x \cdot 3 + (x - y)$ y = nombre de côtés x = nombre de carreaux par cotés	P7*	 • P7 : Variante de P1
F20	$(x - [x - 2]) \cdot ([x - 2] + x)$		• Absence de traces complémentaires permettant une interprétation

Fig. 8 : Récapitulatif des formules produites pour le problème CC1

L'analyse de ces réponses montre tout d'abord la diversité de celles-ci. Ainsi, on constate, qu'à travers ce premier problème, les élèves de 9H ont été capables d'aller vers la généralisation et de produire de nombreuses formulations, correctes ou non, en langue naturelle ou avec des symboles, des expressions littérales ou des procédés de calcul éventuellement par étapes.

Les patterns que nous avions recensés dans l'analyse a priori ont bien été utilisés, ce qui montre que les élèves ont été capables de trouver des configurations invariantes les amenant à des formules.

Les 5 formulations en langage naturel (F6, F7, F9 et F15) ou avec des abréviations (F5) (niveau D de Larguier) sont en fait des procédés de calcul (« il faut faire ») et dans ce cas, si le signe égal est utilisé, c'est avec un sens de « résultat » comme dans le domaine arithmétique (particulièrement visible dans `NC – 1 = NC – 1 x 4 = NCT`). Ces procédés sont corrects. Il reste à amener ces élèves à les traduire en expressions littérales, et la question e peut être une aide pour cela.

Dans plusieurs productions, les lettres utilisées (x,y,z,n,…) ne sont pas définies explicitement. Cependant quand il n'y a qu'une lettre, il est facile de comprendre qu'elle représente le nombre de carreaux d'un côté et on peut penser que pour l'élève c'était une évidence donc qu'il n'avait pas à le préciser (par exemple F4, F10, F14). De plus ces expressions sont correctes.

Quand il y a plusieurs lettres, deux cas sont possibles :

- L'élève a fait une succession de calculs, et certaines lettres désignent un résultat (par exemple F1 ou F11) ; on reste proche des procédés de calcul, mais avec un début de traduction sous forme symbolique ;
- Il y a une mobilisation de lettres à la fois comme variables et comme constantes (par exemple F2, F3 ou F12). Dans ces cas si on remplace la constante par sa valeur la formule est correcte, mais l'élève peut ne pas le voir et il risque d'être bloqué pour la question e, par exemple.

Ces observations sur l'utilisation des lettres rejoignent les conclusions de Krysinska & al. (2009) sur les problèmes de dénombrement avec itérations, qui mettent en lumière l'importance de la double algébrisation (identification de patterns et distinction variables et constantes) et passage du numérique à l'algébrique. L'identification des variables indépendantes et dépendantes et leur standardisation jouent un rôle clé dans la transition des élèves vers une modélisation algébrique (fonctionnelle).

Lors de la mise en commun qui a suivi, l'enseignante a donc dû gérer cette variété de réponses, ce qui constitue un travail conséquent qui peut s'avérer difficile. Celui-ci nécessite d'avoir prévu ces différentes formulations, mais aussi d'être capable de les caractériser, de les classer et de les hiérarchiser (comme nous l'avons fait ici) et enfin d'engager les élèves à les faire évoluer vers des expressions littérales. C'est ce qui a tenté d'être fait et nous avons notamment constaté des difficultés en particulier dans l'utilisation des parenthèses dans les expressions algébriques.

Le problème CC2

Plus complexe que CC1, la structure géométrique (les côtés et la diagonale) de CC2 a probablement rendu l'identification des patterns moins facile, nous avons eu seulement 13 réponses correctes sur 23 élèves. Contrairement à CC1, où les questions intermédiaires offrent une progression claire à travers des cas spécifiques (par exemple, des carrés de tailles 6, 10 et 100), CC2 demande directement une généralisation sans fournir de cadre exploratoire. Cette absence de guidage ne facilite pas l'expression de patterns sur un exemple générique. Parmi les 14 élèves ayant identifié des patterns, tous ont reconnu le pattern P1', tandis que 6 ont identifié P2', 4 ont repéré P3', et seulement 2 ont distingué P4', probablement en raison de sa complexité conceptuelle et technique. Un élève s'est démarqué en tentant d'exprimer la généralité en langage naturel, accompagné d'ostensifs (des flèches illustrant un déplacement des carrés de la diagonale vers le côté supérieur pour le compléter). Cette démarche, anticipée lors de l'analyse a priori, a été observée à trois reprises.

La plupart des élèves (18) ont utilisé des lettres pour exprimer leurs formules, sans utilisation d'abréviations ou de lettres constantes, ce qui témoigne d'une évolution positive dans leur appropriation des outils algébriques. Parmi eux, 14 ont produit une ou plusieurs formules, tandis que 4 se sont limités à introduire la lettre « n » sans développer une expression complète. Enfin, cinq élèves n'ont pas tenté de formuler une généralisation, ce qui pourrait refléter des difficultés spécifiques dans l'abstraction ou la modélisation.

Le problème d'évaluation

La moyenne de la classe est de 2.5/4. La détermination du nombre de cubes à l'étape 2 et 3 n'a pas posé de problèmes aux élèves, ainsi que pour l'étape 33. On note une forte mobilisation du langage algébrique (20 élèves sur 23). Cependant, il n'y a eu que 10 formules justes, ce qui révèle de nouveau des difficultés significatives dans l'utilisation du langage algébrique. Rappelons que par sa conception, ce problème invite plutôt à une lecture itérative, car il s'appuie sur une observation directe des transformations entre trois étapes consécutives. L'identification de la variable indépendante (E, le numéro de l'étape) et de la variable dépendante (N, le nombre total de cubes) n'a pas été comprise par tous. Cela a conduit à des erreurs fréquentes comme la confusion dans la désignation de l'étape $n-1$, qui a amené à des formules erronées comme $6n+1$ au lieu de $1+6(n-1)$. L'utilisation de plusieurs lettres (n, x, y) dont certaines désignent des constantes ($z= 6$ le nombre de faces d'un cube) reflète toujours une difficulté à discriminer les rôles des différentes lettres. L'articulation entre lecture itérative et la généralisation a été une étape difficile pour les élèves. En effet, la formule correcte $N=1+6(E-1)$ nécessitait d'intégrer à la fois une observation des transformations locales (ajouts de 6 cubes) et une compréhension globale de la structure initiale (1 cube à l'étape 1).

CONCLUSION

L'objet de cet article était de montrer la possible intégration de problèmes de généralisation (et de preuve, ce qui sera traité dans un article suivant) dès le niveau de 9H dans le canton de Vaud en Suisse romande afin de faciliter l'apprentissage de l'algèbre et une compréhension significative de l'usage de la lettre. Pour cela, nous avons proposé et mis en œuvre une séquence d'enseignement et nous avons analysé les travaux d'élèves d'une classe de 9H. Cette approche n'est pas nouvelle puisque des expérimentations ont été conduites dans d'autres pays et, actuellement se développe le courant de recherche dit *Early Algebra* (Radford, 2014; Squalli et al., 2020) qui vise à proposer, dès le primaire, des problèmes pour travailler sur les régularités (les *patterns*) et pour produire des formules sans recourir d'emblée à un vocabulaire spécifique et à une symbolisation formelle.

Ainsi, nous avons voulu tester cette approche dans le contexte spécifique de la Suisse romande dans lequel l'algèbre commence à être introduite en 9H par quelques séances et de façon formelle puisque les problèmes sont relégués dans les niveaux scolaires plus avancés. En conséquence, nous avons été soumis à des contraintes fortes à la fois temporelles (10 séances maximum avec une évaluation) et de découpage en chapitres (l'enseignement du chapitre « Calcul littéral » est dissocié des chapitres « NO Nombres naturels et décimaux » et « FA fonction et diagramme »). Malgré cela, nous avons montré qu'en plus de l'engagement fort dans les tâches, les élèves étaient capables de produire des formules de diverses formes et de commencer à identifier le rôle de la lettre en tant que variable afin de produire une formule valable pour une infinité de situations en lien avec un problème donné. Nous avons également observé une progression vers des expressions littérales. Cela nous indique que les problèmes de généralisation sont accessibles aux élèves de 9H et qu'un travail mathématique de qualité est possible à ce niveau pour introduire la lettre avec une alternance de phases de recherche de problèmes et d'institutionnalisation guidées par l'enseignant pour favoriser l'évolution des connaissances. Nous avons également constaté que les élèves ne faisaient pas de vérifications, ce qui peut peut-être s'expliquer par un manque d'habitude de recherche de problèmes.

Cependant, les contraintes temporelles ne nous ont pas permis de travailler suffisamment en profondeur sur une palette plus grande de problèmes de généralisation (par exemple sur les procédures différentes qui pouvaient être mises en place dans les problèmes CC1/CC2 et le problème d'évaluation). Nous pensons également qu'un travail plus important aurait dû être fait (par exemple au moment de la mise en commun) sur les nombreuses formules produites (fig. 8) afin de montrer les différents usages des lettres (dont certains sont de plus incorrects), la distinction variable/constante, les diverses écritures des calculs, le statut du signe égal.

Enfin, nous avions inclus dans la séquence un travail sur la distributivité de la multiplication sur l'addition dans le cadre numérique, car nous avions anticipé les difficultés sur la transformation des expressions littérales qui allaient apparaître, mais nous étions conscients que ce travail ne serait pas suffisant, ce qui a été le cas.

En conclusion, nous pensons que cette séquence peut être reprise au niveau 9H à condition de prendre davantage de temps notamment pour proposer différents problèmes de généralisation et pour exploiter davantage les formules produites et pour faire un travail plus complet (et peut-être sur le long terme) sur la distributivité (Constantin, 2014). Mais nous pensons que ce travail suppose une solide formation en didactique de l'algèbre pour les enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Alves, C., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Dametto, S. M., Lamorthe, C. P., Roubin, S. & Coppé, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, *92*, 1-25.

Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : Atomisation et réduction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *HS*, *4I1*, 41-62.

Bednarz, N. (2005). Parler les mathématiques. *Vie pédagogique*, *136, 20-23*.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Éds.), *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching* (pp. 3-12). Springer Netherlands.

Bronner, A. (2019). Analyse d'une séquence basée sur des problèmes de généralisation pour l'entrée dans l'algèbre : Apport d'une analyse praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *21*(4), 278-297.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – première partie : L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*, 51-94.

Chevallard, Y. (2006). Former des professeurs, construire la profession. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=71

Constantin, C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège?* [Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université]. https://hal.science/tel-01119729/

Coppé, S., Grugeon-Allys, B. & Pilet, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : L'exemple du carré bordé. *Petit x*, *102*, 57-80.

Coulange, L. & Grugeon, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, *78*, 5-23.

Denis, M. H., Faes, S., Jaffrot, M., Riedweg, C., Staïner, H. & Vaissier, V. (2004). n, c'est un nombre ou c'est des nombres ? Ou Algèbre-Modélisation-Formalisation. *Repères-IREM*, *54*, 5-21.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 5-31.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(2), 167-210.

Hosseinian, S. (2021). À la recherche d'une didactique mathématique en algèbre adaptée : Étude comparative des manuels de maths de Suisse romande et d'Iran au niveau 11H. *Revue de Mathématiques pour l'école*, *235*, 73-87.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra.* In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades : What is it. *The Mathematics Educator*, *8*, 139-151.

Kouki, R. & Hassayoune, S. (2015). La difficile genèse de la pensée algébrique : Ruptures et obstacles épistémologiques. In L. Theis (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 290-312)

Krysinska, M., Mercier, A., & Schneider-Gilot, M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *29*(3)*, 247-304*.

Larguier, M. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. In L. Theis (Ed), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissag*e (pp. 313-333).

Nigon, C. B. & Coppé, S. (2014). La preuve pour comprendre, un levier pour la construction du sens de la lettre en classe de Cinquième. *Repères IREM*, *94*, 9-30.

Piolti-Lamorthe, C. & Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : Entre sens et technique. *Bulletin vert APMEP, 488, 272-280.*

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277.

Squalli, H. (2000). Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. [Thèse de doctorat]. Université Laval, Canada.

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A., & Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires.* Québec : Livres en ligne du CRIRES. https ://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 189-199.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, 33-44.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 2*(3)*,* 133-170.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations problèmes au début du secondaire*. De boeck.

Vlassis, J., Demonty, I. & Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux Cahiers de la Recherche en Education*, *20*(3), 131-155.

Wang, X. (2015). The literature review of algebra learning : Focusing on the contributions to students' difficulties. *Creative education*, *6*(02), 144-153.

Annexe 1

Étude des MER : nombre d'exercices et/ou de problèmes par année relevant de l'algèbre

	9H	**10H**	**11H**
Nombre d'exercices sur le calcul littéral	26 sur 83	76 sur 228	73 sur 375
Nombre d'exercices sur la généralisation	1 sur 83	1 sur 228	6 sur 375
Nombre d'exercices sur la preuve	0 sur 83	1 sur 228	9 sur 375
Nombre d'exercices sur les équations	0 sur 83	49 sur 228	139 sur 375
Nombre d'exercices sur les fonctions	57 sur 83	101 sur 228	148 sur 375

Étude des MER : Les exercices de 9H selon leurs dimensions dans le chapitre « calcul littéral »

Objectifs	Exercices	Dimension
Opérations arithmétiques	FA58, FA60, FA64	Objet
Traduire un texte par une expression arithmétique	FA59	Objet
Traduire un texte / une figure géométrique par une expression littérale et inversement	FA61, FA62, FA63, FA65, FA66, FA67, FA68, FA76, FA77, FA78, FA79, FA81	Objet
Exprimer le suivant, le multiple, etc. d'un nombre (aspect structurel)	FA61, FA62, FA66, FA78, FA82, FA83,	Objet
Calculer une expression littérale pour une valeur donnée :	FA69, FA70, FA71, FA76, FA79, FA80	Objet
Connaître, utiliser les règles et conventions usuelles d'écriture :	FA58, FA60, FA72, FA73, FA74, FA75	Objet

ANNEXE 2 : LA SÉQUENCE

- **Séquence**
  - **Séance 1 et 2 - Activité 1 : Rappels sur les règles de la distributivité**
  - **Séance 3 et 4 - Activité 2 : Généralisation**
  - **Séance 5 et 6 - Activité 3 : Le calcul littéral pour prouver**
  - **Séance 7 - Évaluation du type TA**

Les séances

- **Séquence**
  - **Séance 1 et 2 - Activité 1 : Rappels sur les règles de la distributivité**
    - **CR1$_{\text{S1-2}}$ Calculs réfléchis, sans poser et utiliser la calculatrice — Variante 1**
    - **CR2$_{\text{S1-2}}$ Calculs réfléchis, sans poser et utiliser la calculatrice — Variante 2**
    - **CR3$_{\text{S1-2}}$ Calculs réfléchis —Pour les plus rapides**
  - **Séance 3 et 4 - Activité 2 : Généralisation**
    - **CC1$_{\text{S3-4}}$ Les carreaux colorés — variante 1**
    - **CC2$_{\text{S3-4}}$ Les carreaux colorés — Variante 2**
  - **Séance 5 et 6 - Activité 3 : Le calcul littéral pour prouver**
    - **PC1$_{\text{S5-6}}$ Un drôle de programme de calcul**
    - **PC2$_{\text{S5-6}}$ Choix sans conséquences**
    - **PC3$_{\text{S5-6}}$ Ecrire avec des lettres**
    - **PC4$_{\text{S5-6}}$ Vous avez dit conjecture**
  - **Séance 7 - Évaluation du type TA**

Annexe 3 : Activité de « calcul réfléchi »

Séance 1 et 2 - Rappels sur les règles de la distributivité

Activité CR1. Calculer sans poser et sans utiliser la calculatrice.

a. 45 x 21 =	b. 26 x 98 =	c. 23 x 103 =
d. 43 x 32 =	e. 21 x 45 =	

Activité CR2. Calculer sans poser et sans utiliser la calculatrice.

a. 8 x 15 + 2 x 15 =	b. 12 x 32 – 2 x 32 =	c. 101 x 72 - 72 =
d. 155 x 99 + 101 x 155		

Activité CR3. Calculer sans poser et sans utiliser la calculatrice.
(Pour les plus rapides)

a. 240 x 11 =	b. 16 x 57 + 57 x 84 =	c. 997 x 25 =
d. 33 x 591 - 790 x 33 =		