INSTAURER UN DEBAT MATHEMATIQUE EN CLASSE DE PRIMAIRE : RECIT D'UNE EXPERIMENTATION AUTOUR DES TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

Christine Scalisi Neyroud ; Jimmy Serment ; Valérie Batteau ; Sarah Epp ; Jana Trgalová ; Liliane Vialle

UER MS, HEP Vaud, Lausanne

Résumé

Cet article relate une expérimentation menée sous la forme de lesson study (LS) visant à mettre en œuvre un débat mathématique autour des transformations géométriques en classe de 7-8P. L'équipe a préparé une leçon en commençant par la planification des éléments essentiels à afficher au tableau. Cette expérimentation nous a permis d'identifier des éléments qui favorisent et rendent possible l'émergence de débats en classe de mathématiques.

Mots clés : débat mathématique, transformations géométriques, tableau, lesson study

INTRODUCTION

Notre équipe, composée d'enseignants et de formateurs en didactique des mathématiques, a travaillé en *lesson study* (LS, Clivaz, 2015) dans le cadre de la préparation des formations continues aux nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques (ESPER) dans le Canton de Vaud. Notre travail en LS a porté sur le débat mathématique et sur les transformations géométriques, en particulier l'anticipation de l'image d'une figure après deux isométries, en classe de 7-8P (élèves de 10/11 et 11/12 ans). Nous avons choisi une tâche, issue des nouveaux moyens de 7P *Après deux retournements* (voir Annexe 1). La tâche a été modifiée lors de la préparation de la leçon puis a été mise en œuvre dans une classe de 8P de la région lausannoise.

La première partie de l'article présente quelques éléments sur le débat mathématique et scientifique. La deuxième partie expose les choix collectifs de conception et d'analyse *a priori* de la tâche, afin de mettre en œuvre le débat en classe. La troisième partie relate des éléments de la leçon mise en œuvre en classe. Nous concluons sur l'intérêt du débat en classe de mathématiques ainsi que sur les éléments qui le favorisent et le rendent possible.

LE DÉBAT MATHÉMATIQUE ET SCIENTIFIQUE

Legrand (1993) décrit le débat scientifique comme un moyen d'acquisition des connaissances. Il fait l'hypothèse que pour comprendre une proposition scientifique, il faut être capable de douter de sa véracité, de trouver des contre-arguments ou des éléments de validation. Pour ce faire, rien de mieux que de travailler sur les propositions des pairs qui sont, *a priori*, de nature incertaine. Pour y arriver, il y a trois conditions indispensables (Legrand, 1993) :

- Les énoncés travaillés doivent être conjecturaux.
- L'ensemble de la classe doit pouvoir oser émettre des propositions, mêmes fausses, sans se sentir dénigré par le reste de la classe.
- L'enseignant ne doit pas montrer de validation ou de désaccord sur les propositions afin que les élèves puissent réellement douter des propositions des pairs.

L'auteur ne fait guère de distinction entre le débat scientifique et le débat mathématique. Pour lui, le débat mathématique est un débat scientifique qui s'inscrit dans le cadre des mathématiques, en proposant une situation problème qui permet d'ouvrir un débat.

La différence entre ces deux débats se situe notamment dans les définitions d'une hypothèse et d'une conjecture. Une hypothèse n'a pas le même sens en sciences qu'en mathématiques. Selon l'Aide-mémoire 9-10-11 , « en mathématiques, on emploie le terme conjecture, alors qu'en sciences, on utilise le terme hypothèse (faire une hypothèse) » (p. 13). Une conjecture serait une hypothèse mathématique. Continuons notre investigation du côté des textes officiels, le Plan d'Études Romand (2010d). Ce dernier parle du débat scientifique en ces termes :

> Il peut se faire aussi bien en début d'activité de recherche afin d'extraire et de confronter les conceptions de chacun, qu'en fin d'activité où il s'agira cette fois de confronter les résultats obtenus. L'élève qui veut participer au débat scientifique organisé par l'enseignant est invité à prendre la parole en s'adressant directement à ses pairs (lexique du PER, Conférence intercantonale de l'instruction publique, 2010b).

Le PER (2010b) explique de façon nuancée la différence entre hypothèse et conjecture.

HYPOTHÈSE

ce terme a un sens différent en mathématiques et en sciences ; en mathématique, il correspond à ce qui est connu, par exemple pour démontrer un théorème; en sciences, il correspond à une supposition, une tentative d'explication résultant d'une problématique, plausible en l'état des connaissances de la personne qui l'émet qui doit être confrontée à l'épreuve des faits, l'élaboration d'hypothèses est une étape essentielle à toute démarche d'investigation scientifique.

CONJECTURE

Par «pose d'une conjecture puis validation ou réfutation», on entend : émettre des suppositions sur «quelque chose qui semble vrai», puis essayer de le démontrer. «Conjecture» a ainsi une signification proche du terme «hypothèse» employé dans la langue courante. Pour le mathématicien, «hypothèse» prend un sens particulier, c'est un outil de démonstration.

Fig. 1 : Extrait du lexique du PER (2010b)

À noter que certaines conjectures restent encore à prouver, même si elles semblent stables et que l'on se base sur elles telle que la conjecture de Goldbach. Prouver une conjecture est nettement plus compliqué que la réfuter, car pour réfuter, il suffit d'un contre-exemple.

Forts de ces considérations, nous optons pour les termes de débat mathématique et de conjecture émis par les élèves qui sera ensuite à valider ou réfuter.

Le rôle de l'enseignant est triple lors du débat (Legrand, 1993). Il doit veiller en premier lieu aux enjeux épistémologiques, c'est-à-dire qu'il doit toujours veiller à ce que le débat soit un enjeu mathématique. Il doit être capable de ramener sa classe sur les objectifs mathématiques au cas où le débat dévierait de sa trajectoire initiale. Il a un rôle social aussi, il ne doit pas interroger tous les élèves, mais il doit veiller à ce que toutes les idées soient exprimées.

Son dernier rôle est la gestion didactique du débat. L'enseignant doit rythmer le débat pour que tous les élèves puissent comprendre. Pour ce faire, il devra prendre le temps de noter au tableau les arguments, ce qui permet de ralentir les échanges oraux, donc de laisser le temps aux élèves les moins rapides de comprendre les arguments. L'écriture au tableau laisse également une trace, une mémoire de ce qui a été dit. Tout en restant neutre en notant les arguments au tableau, ceux-ci serviront à la fin du débat comme une base potentielle pour une institutionnalisation.

Cette approche, différente de l'enseignement ordinaire, ne va pas forcément de soi. L'enseignant doit intégrer durant la leçon des scénarios imprévus car la gestion du débat n'est pas entièrement prévisible et se conduit en fonction des réponses des élèves. Une nouvelle dynamique se met en place et se construit principalement sur les interactions entre les élèves (Bergé, 2016). Son introduction doit être progressive. Elle fait partie d'un continuum qui se déroule jusqu'à la fin de la scolarité de l'élève, commençant au cycle 2, comme le mentionne le PER dans les éléments pour la résolution de problèmes.

On peut initier le débat mathématique au cycle 2 en montrant par un contre-exemple que la conjecture est fausse. C'est une première sensibilisation à ce type de preuve. A cet effet, l'aide-mémoire du secondaire 1 (2019, p. 190) donne les règles principales du débat mathématique :

- Une affirmation est soit vraie, soit fausse ; il n'y a pas d'exception.
- Des exemples, même nombreux, qui vérifient une affirmation ne suffisent pas à prouver que cette affirmation est vraie.
- Un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.
- Une mesure sur un dessin ou une constatation « à vue d'œil » ne suffisent pas à prouver qu'une affirmation géométrique est vraie ou fausse

Un débat s'effectue nécessairement en collectif et peut représenter un des objectifs d'une mise en commun, mais sans se réduire à une mise en commun. En effet, la posture de l'enseignant dans la mise en commun classique est celle de la personne qui « sait » et qui va amener les élèves, par plus ou moins de guidage, à discuter des différentes procédures et réponses des élèves pour faire émerger les connaissances visées, tout en laissant les élèves s'exprimer et présenter leur démarche. Dans le débat mathématique, la mise en doute d'une affirmation permet aux élèves d'avancer des arguments pour défendre leur affirmation. L'incertitude dans le processus de ce type de débat s'arrête lorsqu'une conjecture a été validée ou réfutée, suivie d'une institutionnalisation pour clore les investigations et faire ainsi émerger les connaissances mathématiques ou paramathématiques visées. À ce moment, l'enseignant reprend son rôle habituel.

La remise en doute des savoirs énoncés, origine des conjectures, place les élèves dans une certaine incertitude à laquelle l'enseignant participe par le fait qu'il ne prend pas position, mais il reste garant du maintien du cadre des interactions sociales et mathématiques. La raison de ce changement d'attitude est très bien décrite par Legrand (1993) :

> L'élève accepte plus facilement l'exigence de produire des contre-exemples précis, de fournir des arguments reconnus de tous, quand cette demande vient de personnes qui réclament des arguments pour être persuadés et comprendre, que lorsqu'elle est faite par l'enseignant. En effet, l'élève « sait que le professeur sait » et a déjà tout compris, il sait donc que son questionnement est un faux questionnement et qu'il cherche principalement à vérifier que lui, a bien compris et arrive à l'exprimer (p. 127).

La partie suivante illustre la démarche collective de conception et d'analyse *a priori* de la tâche choisie.

CONCEPTION ET ANALYSE A PRIORI DE LA TÂCHE[1]

La tâche conçue collectivement par l'équipe de *lesson study* vise les objectifs d'apprentissage suivants :

- anticiper l'image d'une figure après deux symétries successives ; reconnaître, décrire et nommer des isométries (translation, symétrie axiale, rotation) ; résoudre des problèmes géométriques en lien avec les transformations étudiées : poser une conjecture, puis la valider ou réfuter (MSN21, 2010c) ;
- s'engager dans le débat mathématique.

En comparaison avec la tâche initiale[2] *Après deux retournements* (Annexe 1), nous proposons trois situations A, B et C (Fig. 2 et annexes 2-3-4) et deux situations pour la différenciation pour les élèves qui auraient terminé avant les autres (annexes 5 et 6) : sur un carré jaune, des figures sont marquées (rond, petit carré, triangle rectangle isocèle et mot JEU), ainsi que deux droites sécantes, qui sont des axes de symétries. Les

[1] Pour plus de détail sur la tâche et son analyse, voir le site « Les transformations géométriques en 7-8P », https://sites.google.com/view/fcmermath7-8hepvaudtransformat/accueil.

[2] Nous avons travaillé en lesson study sur la tâche initiale, présente dans ESPER, avant l'errata de 2024.

élèves doivent dessiner les images de ces figures après deux symétries, l'une d'axe rouge, puis l'autre d'axe bleu. Ils disposent des fiches avec les consignes et de leurs instruments de géométrie.

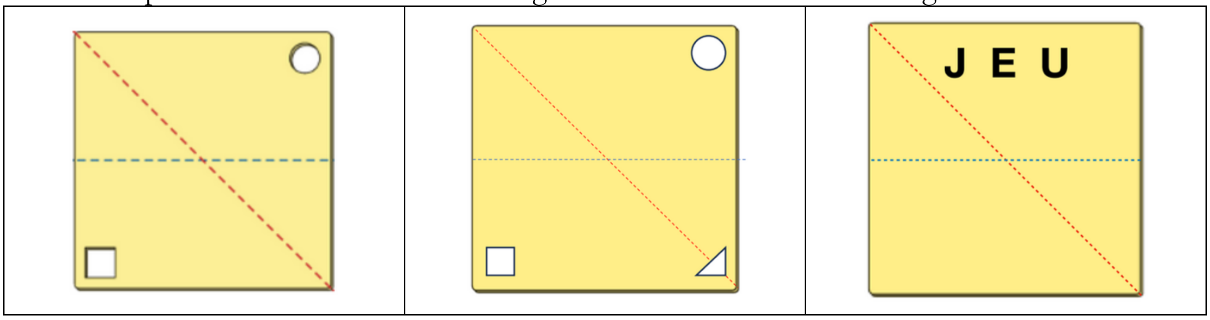


Fig. 2 : Les trois situations A, B et C (de gauche à droite) proposées aux élèves

Ces situations sont conçues pour faire émerger le débat mathématique entre les élèves et sont différentes quant à leur complexité. Nous considérons les variables didactiques suivantes :

(V1) nombre de figures sur le carré jaune : avec une ou deux figures, il est aisé de trouver des situations où la confusion entre symétrie et rotation (comme composition des deux retournements) est possible : avec plus de deux figures, il est plus difficile de trouver de telles situations ;

(V2) nature des figures : si les figures sont elles-mêmes symétriques (ex. carré ou cercle) et si leurs axes de symétrie sont parallèles aux axes rouge ou bleu, il est aisé de trouver des situations où la confusion entre symétrie et rotation (comme composition des deux retournements) est possible ; dans le cas où les formes ne sont pas des figures géométriques classiques (ex. lettres ou mots, objets réels), certaines propriétés de la symétrie axiale, comme la non-conservation de l'orientation, sont plus facilement perçues, par exemple le retournement d'une lettre ou d'un mot donne une image « à l'envers » ;

(V3) emplacement des figures sur le carré jaune : l'emplacement des figures dans les coins ou au milieu d'un bord du carré jaune facilite l'anticipation de l'emplacement des images des figures après retournement qui seront aussi dans des coins ou sur le bord ;

(V4) orientation des axes de symétrie : si les axes sont sécants, la composition des deux symétries est une rotation, s'ils sont parallèles, c'est une translation.

Pour concevoir les trois situations, nous considérons des combinaisons de ces variables, car elles ont des effets sur les conjectures que les élèves peuvent proposer.

Dans les trois situations, les axes de symétries sont sécants (V4). Pour la situation A (à gauche de la Fig. 2), le choix retenu est d'avoir deux figures (V1), ayant des axes de symétrie parallèles aux axes de symétrie rouge ou bleu (V2) et placées dans les coins opposés du carré jaune (V3). L'image après les deux retournements est obtenue par une rotation (axes sécants). Cette image paraît cependant, dans ce cas, la même que si l'on avait effectué uniquement une symétrie d'axe vertical. En comparant les figures de départ et celles obtenues après deux retournements, on attend la conjecture initiale suivante : la composition de deux symétries axiales d'axes sécants est une symétrie axiale. Ce choix a été fait pour favoriser le débat mathématique. Pour la situation B (au milieu de la Fig. 2), le choix retenu est d'avoir trois figures (V1), ces figures ayant un axe de symétrie parallèle aux axes de symétrie rouge ou bleu (V2) et placées dans trois coins (V3) du carré jaune. L'image obtenue après ces deux retournements est toujours une rotation (axes sécants), mais cette fois, l'image de la situation B par une symétrie d'axe vertical aurait donné une image différente. La composition des deux symétries ne prête plus à la confusion entre rotation et symétrie. Cette situation est pensée comme un contre-exemple qui permet d'invalider la conjecture initiale et de formuler une nouvelle conjecture : la composition de deux symétries axiales d'axes sécants n'est pas une symétrie axiale (c'est une rotation). Pour la situation C (à droite de la Fig. 2), le choix retenu est d'avoir le mot JEU (V2), un mot qui ne comporte pas d'axe de symétrie interne (V2), placé au centre d'un côté du carré jaune (V3). Dans ce cas, il n'y a pas non plus confusion entre rotation et symétrie (comme composition des deux retournements). De plus, l'image après le premier retournement n'est pas « lisible » (on voit bien le retournement de l'image, ce qui n'est pas le cas des figures géométriques précédentes). Cette situation permet donc de vérifier la seconde conjecture.

PLANIFICATION DE LA LEÇON

La mise en œuvre de la tâche a commencé avec l'anticipation de la mise en commun des procédures attendues des élèves et la planification du tableau (noir et/ou interactif) avec les éléments mathématiques attendus lors de la leçon. Nous avons ainsi anticipé pour chaque phase de la leçon ce que l'enseignant allait écrire au tableau ou projeter sur la partie interactive (Balegno et al., soumis). Cette méthode de préparation de leçon s'inscrit dans la lignée de travaux précédents de l'équipe (Batteau & Clivaz, 2023) et s'appuie sur la pratique japonaise du *bansho* (Tan et al., 2018 ; Yoshida, 2005).

L'enseignant commence à remplir le tableau sur la gauche, puis, progressivement la classe et l'enseignant remplissent le tableau vers la droite. La leçon se déroule en trois temps.

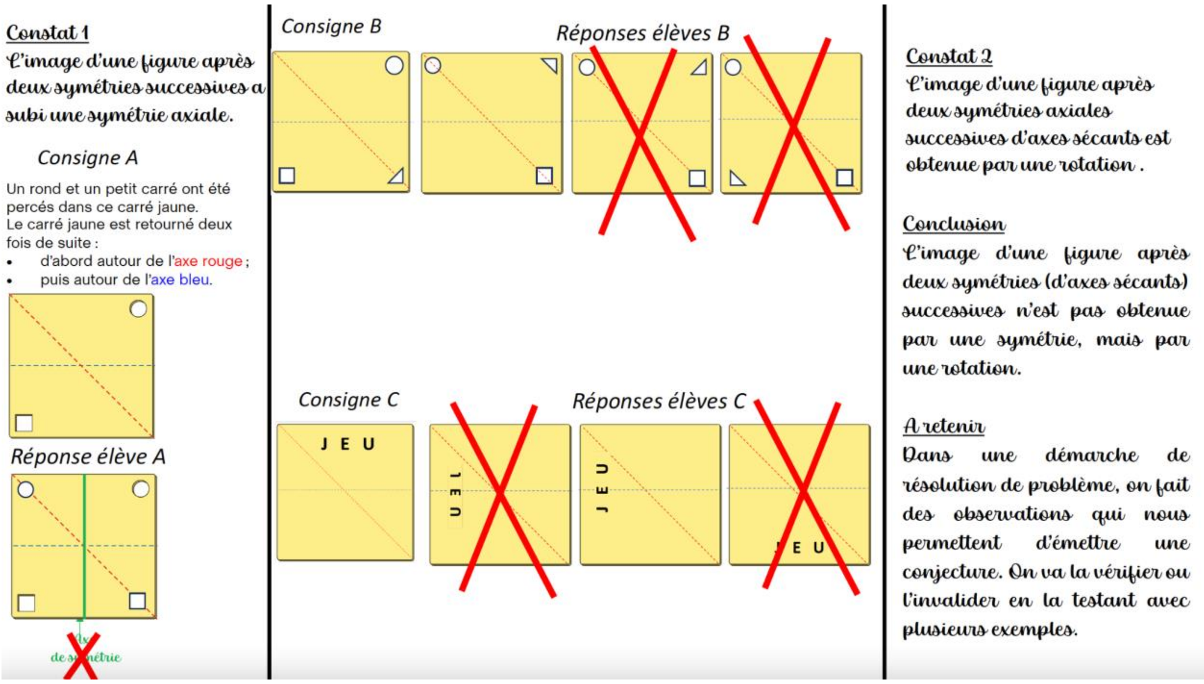


Fig. 3 : Tableau planifié pour la leçon

Il est à noter que chaque temps est précédé d'un moment de manipulation, de divers essais avec du matériel en lien avec la tâche. Il est à disposition si les élèves le demandent.

Temps 1. La consigne de la situation A (voir Annexe 2) est écrite avant le début de la leçon par l'enseignant. L'objectif est de permettre un moment de discussion entre pairs avec ce support visuel pour discuter de la proposition de l'élève. Les élèves ont ainsi la représentation de départ et une réponse proposée sous les yeux ; ce premier moment de discussion permet aux élèves d'expliquer comment passer de la première représentation à la seconde. Ils peuvent ainsi émettre une conjecture, qui est nommée « constat » en classe. Celui-ci est noté au-dessus de la consigne et doit faire consensus au sein de la classe. Si des élèves ne sont pas en accord avec un autre groupe d'élèves, ils défendent leur position. Le rôle de l'enseignant est primordial : il dirige d'abord le débat sans influencer les élèves, ensuite il retranscrit le constat de la classe, même incorrect, par exemple : « Si je fais deux retournements/symétries successifs, c'est comme si je faisais un seul retournement/symétrie ».

Temps 2. La partie centrale du tableau sert de support aux situations B et C (voir Annexes 3 et 4). Celles-ci sont projetées sur la gauche de l'écran ; trois carrés vierges sont insérés sur la droite de la figure originale pour l'activité B/C pour que les élèves puissent y noter leurs réponses. L'enseignant désigne trois élèves qui mettent leurs réponses et présentent leurs procédures. Il est important que ceux-ci notent leur réponse simultanément pour éviter qu'ils ne s'influencent mutuellement. L'enseignant sélectionne au préalable des productions différentes : un début d'argumentation requiert des réponses variées pour susciter le débat et la validation des réponses. Après avoir discuté les réponses et les procédures des élèves, l'enseignant organise une mise en commun pour mettre en relation le premier constat avec les réponses de la fiche B. Le débat peut alors émerger entre les élèves qui pensent que la succession de deux symétries est une symétrie et ceux qui vont remettre en doute ce constat. A l'issue du débat, le second constat est noté en haut, sur la partie droite du tableau, afin de mettre les deux constats l'un en face de l'autre pour montrer la contradiction. Il est attendu que le second constat soit de type : « Si je fais deux retournements/symétries de suite, ce n'est pas un retournement/symétrie » ou « Si je fais deux retournements/symétries de suite, cela peut être une rotation ». La fiche C vient ensuite, en bas du tableau central. Cette situation permet de vérifier le deuxième constat et de réfuter à nouveau le premier constat.

Temps 3. La partie droite du tableau comporte les éléments d'institutionnalisation possible de la leçon. L'enseignant a déjà noté le second constat en haut de cette partie et il doit désormais continuer le débat mathématique entre les élèves pour faire émerger les éléments à retenir de la situation. Les élèves voient leurs deux constats contradictoires (en haut à gauche et en haut à droite), et doivent argumenter pour réfuter l'un et vérifier l'autre. La conclusion mathématique est inscrite au centre du tableau de droite et doit faire consensus pour toute la classe. La conclusion porte sur des éléments mathématiques à institutionnaliser. L'équipe avait anticipé d'institutionnaliser des connaissances sur les transformations géométriques (« L'image d'une figure après deux symétries d'axes sécants n'est pas obtenue par une symétrie, mais peut l'être par une rotation ») ou sur des compétences de résolution de problèmes. L'enseignant met en avant, en bas à droite du tableau (Figure 3), ce qui est à retenir pour la démarche de résolution de problèmes. L'écriture de cette partie est à la charge de l'enseignant, la formulation des éléments à institutionnaliser peut se faire conjointement entre l'enseignant et les élèves.

La partie suivante illustre des éléments d'analyse de la conduite du débat mathématique par l'enseignante ou l'enseignant lors de la mise en œuvre en classe de la leçon.

MISE EN ŒUVRE DE LA LEÇON EN CLASSE

Nous avons testé cette tâche dans une classe de 8P de 19 élèves (désignés E1-19 dans la suite), à Pully, sur deux périodes consécutives. Les élèves avaient déjà vu les isométries et l'objectif principal de la leçon est centré sur le débat.

Lors du temps 1 autour de la situation A, les élèves travaillent par deux. Plusieurs procédures et réponses différentes apparaissent dans les groupes. Deux élèves émettent l'hypothèse que la figure a subi un glissement, une translation comme dans l'extrait ci-dessous.

> E1 : ça a fait ça pour moi, hop et hop.
>
> E2 : attends non, tu l'avais tourné [retourne le grand carré selon l'axe oblique]
>
> E1 : [retourne le grand carré selon l'axe oblique puis selon l'axe horizontal]
>
> E2 : donc tu fais un glissement, une translation.
>
> E1 : en soi, oui.

D'autres élèves trouvent des rotations d'angles 90° et 270°, ce que nous n'avions pas anticipé. Un seul groupe d'élèves trouve une symétrie axiale. Lors de la mise en commun, l'enseignant (désigné par ENS dans la suite) demande aux élèves de présenter leurs procédures et leurs réponses de la situation A. Une première élève présente sa procédure avec une rotation d'angle 90° et une autre élève avec une rotation d'angle 270°. Une troisième élève propose la symétrie.

> E3 : on a tourné à l'intersection des axes [l'élève fait tourner le grand carré jaune en même temps]. On tourne [tourne le grand carré jaune].
>
> ENS: très bien, donc c'est une rotation à partir du milieu du carré. De combien de degrés à peu près ?

E3 : [pivote le grand carré], je ne sais pas.

ENS: ah, elle ne sait pas combien elle a tourné.

E4 : 90 degrés.

ENS: 90 degrés. Bon, est-ce que tout le monde a mis ça ?

[...]

ENS: quelqu'un a mis autre chose qu'une rotation ? Je vais être plus précis dans les solutions trouvées.

[...]

E5 : si on met l'axe de symétrie ici [trace un axe de symétrie vertical], en miroir, si on le retourne, ça fait ça [montre le carré de départ], donc c'est juste.

ENS: C'est juste ? Elle [E5 au tableau] propose un axe de symétrie. [...] Elle dit bah tiens si je fais une symétrie axiale à partir de l'axe vert ici [l'enseignant montre au tableau noir l'axe vertical] et bien j'obtiens la solution finale. Est-ce que c'est vrai ? Oui, non ? Rotation, on en a parlé et elle [E5] nous dit qu'il y a une autre solution : symétrie axiale. Possible ou pas possible ? Possible d'avoir deux solutions d'un même problème ? Et du coup, symétrie axiale, vous validez ou pas ?

Élèves : Oui.

ENS: Bon.

Cet extrait illustre comment l'enseignant gère le débat en classe face à deux réponses différentes proposées par les élèves. Il ne valide pas les procédures et les réponses des élèves, renvoyant à la classe la responsabilité de valider le fait d'obtenir une symétrie après deux symétries successives.

L'équipe avait anticipé que cette mise en commun serve à émettre la première conjecture. Au vu des réponses données pendant la leçon, l'enseignant a dû modifier cette conjecture selon l'énoncé des élèves : « après deux retournements, on peut tomber sur différents degrés de rotation. On peut aussi trouver une symétrie axiale » (voir en haut à gauche de la Figure 4).

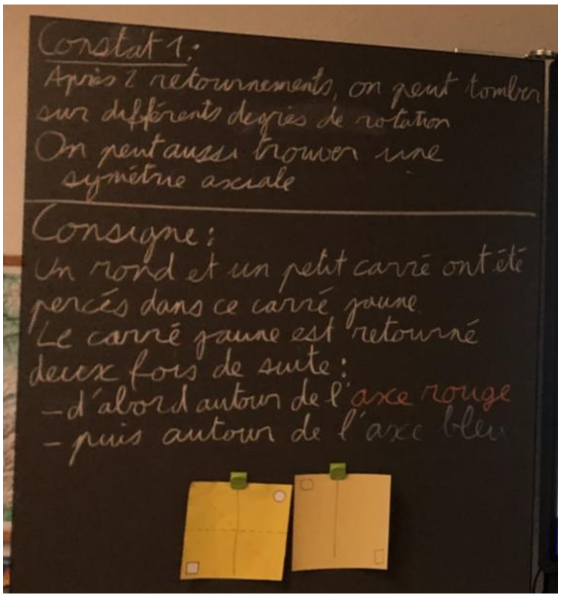


Fig. 4 : Partie gauche du tableau

Lors du temps 2, les élèves sont amenés à résoudre la situation B pour vérifier ou invalider cette conjecture. Durant la mise en commun, trois élèves choisis par l'enseignant ont tracé simultanément leurs réponses sur le tableau blanc au centre. L'enseignant amène le débat par la question suivante « Est-ce qu'il y a une solution qui n'est pas possible du tout ou est-ce que c'est autre chose ? »

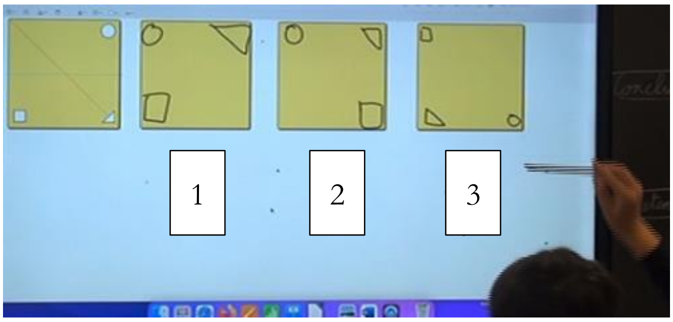


Fig. 5 : Tableau central projeté lors du débat du temps 2

Un élève va au tableau, retourne deux fois son carré jaune pour justifier que la solution $\boxed{2}$ est celle qui est correcte. L'enseignant désigne un autre élève de la classe et lui demande s'il est convaincu.

> E6 : dans le premier constat, on avait dit qu'on pouvait tomber sur différents degrés de rotations. En fait, ça dépend c'était toujours 270 de degré de rotation. Enfin, dans la solution $\boxed{2}$ de E7 le triangle par rapport à sa position de départ, il a fait trois coins. Donc c'est moins 270.
>
> Enseignant : donc c'est juste ?
>
> E6 : oui
>
> ENS: pour le triangle ? et pour les autres [le carré et le cercle] aussi ? Donc en fait, ces deux solutions [montre $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$] c'est bon, mais celle-ci [montre $\boxed{3}$] est invalidée ? [... ENS valide $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ avec des coches] Celle de gauche n'est pas juste avec ton argument ?
>
> E6 : oui, c'est pas possible.

E6 utilise le fait que les retournements reviennent à faire une rotation de centre d'intersection des axes vert et rouge et d'angle -270°. L'enseignant poursuit en demandant à une autre élève de justifier si les solutions proposées au tableau sont correctes.

> ENS: bon, on va écouter [E7] qui elle pense différemment.
>
> E7 : normalement l'alignement, c'est le carré, ensuite le triangle et ensuite le rond. Et là [Fig. 5 - $\boxed{1}$], c'est carré, rond et triangle.
>
> ENS: donc en fait, c'est toujours carré, triangle, rond. C'est ça que tu nous dis ?
>
> E7 : oui.
>
> ENS: du coup, carré, rond, triangle [Fig.5 - $\boxed{1}$], c'est pas le même alignement, ça marche pas. Ça te convainc comme argument ?
>
> E6 : oui

Dans cet extrait, E7 utilise la propriété de conservation de l'orientation par rotation. C'est-à-dire une figure et son image par rotation ont la même orientation.

> ENS: bon, et puis lui [Fig. 5 - $\boxed{3}$] du coup, carré, triangle, rond, donc il est bon aussi celui-là [montre $\boxed{3}$ sur Fig. 4] ? Du coup, il y a deux solutions ? [à E8]

E8 montre à partir de la situation de départ (carré à gauche) les images successives des figures après un puis deux retournements. Il utilise ainsi une procédure d'anticipation mentale des images des figures par symétrie.

> E9 : si on reprend depuis le début, on tourne d'abord selon le rouge, le carré se retrouve ici [en haut à droite du carré jaune] et le rond se retrouve ici [en bas à gauche du carré jaune] et le triangle bouge pas, vu que ça se retourne sur lui-même. Et ensuite du coup, le rond il monte là [en haut à gauche sur le

carré jaune], et le carré il descend [en bas à gauche sur le carré jaune] et le triangle il monte [en haut à droite sur le carré jaune].

ENS: du coup, il y a qu'une seule solution. Oui ?

E9 : oui.

ENS: vous êtes d'accord avec ce qu'il a dit ? Tu n'es pas d'accord, vas-y. [...]

Le temps 2, comme anticipé, permet d'invalider le fait que deux retournements successifs reviennent à réaliser une symétrie (une partie du constat 1) et à faire émerger le constat 2 : deux retournements successifs reviennent à réaliser une rotation.

Lors du temps 3 comme prévu, l'enseignant choisit trois élèves pour tracer leurs solutions au tableau pour la situation C avec les lettres JEU. Il les amène à présenter leurs différentes procédures. Il anime ensuite le débat avec pour objectif de réfuter une seconde fois le premier constat et de vérifier le second.

Dans la suite de la leçon, comme anticipé, l'enseignant reprend la conjecture du début et fait venir des élèves au tableau pour discuter des images par une symétrie d'axe vertical avec les situations B et C. Il met alors en lumière le rôle du contre-exemple pour réfuter une conjecture.

Lors de la fin de la leçon, l'enseignant demande aux élèves ce qu'ils pourraient retenir. Des élèves répondent qu'ils « ont fait des maths », « ils ont réfléchi », ils ont fait des « raisonnements », des « constats ». L'enseignant nomme conjectures les constats faits par les élèves. Il institutionnalise à l'écrit (Fig.6) et à l'oral qu'un contre-exemple suffit pour invalider une conjecture, c'est-à-dire pour montrer qu'une conjecture est fausse.

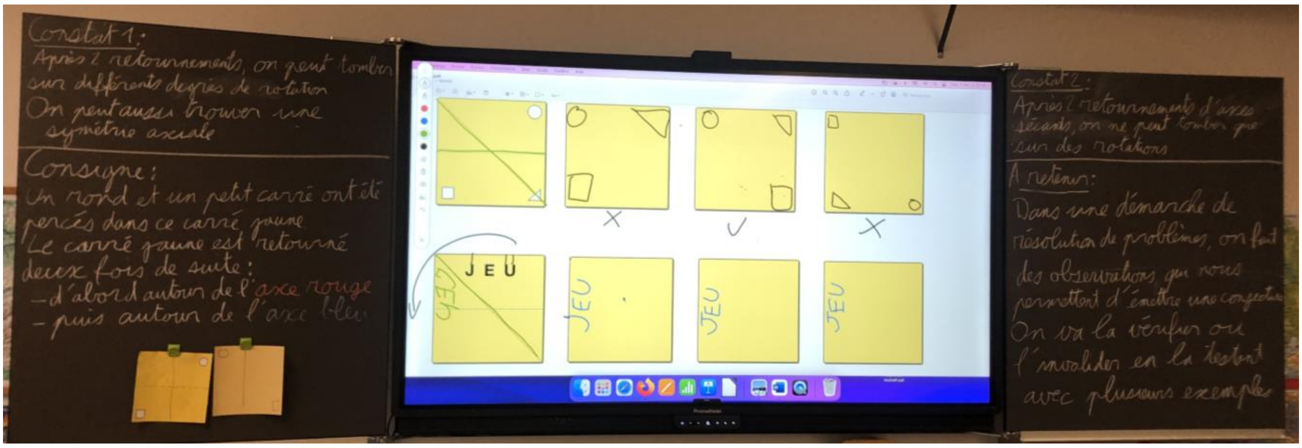


Fig. 6 : Tableau à la fin de la leçon

Discussion et conclusion

En comparant le tableau planifié (Fig. 3) et le tableau réalisé (Fig. 4), nous observons que globalement la préparation avec la trame a été respectée. Néanmoins, les proportions du tableau utilisé ont contraint l'enseignant d'aligner horizontalement la figure initiale et la réponse en papier sur la partie de gauche du tableau, plutôt que de les mettre verticalement. Ce simple changement a eu des effets inattendus sur les réponses des élèves. En effet, l'un d'entre eux a placé un axe de symétrie entre la figure initiale et sa réponse, il a ainsi imaginé une symétrie axiale entre ces deux représentations, ce qui d'un point de vue perceptif est correct, mais qui ne répond pas à la question originale.

Un autre changement a porté sur la différence entre la première conjecture attendue qui portait uniquement sur la symétrie axiale et la première conjecture réalisée proposant des rotations avec différents angles et une symétrie axiale. La première conjecture réalisée combinait les deux conjectures planifiées par l'équipe, l'enseignant a dû improviser pour faire porter le débat sur une partie de la première conjecture (symétrie).

On voit également que la partie de droite du tableau n'a pas respecté entièrement la préparation. En effet, le second constat et la conclusion étant très proches, il a été superflu d'ajouter une conclusion.

L'organisation et l'anticipation du tableau ont permis de faciliter l'entrée dans le débat de la part de tous les élèves. Cela peut s'expliquer par le fait que décrire des transformations géométriques avec des supports visuels (tableau et carrés agrandis) facilite la compréhension des arguments des uns et des autres. Les éléments importants prévus étaient présents visuellement, ceci a facilité les divers moments de mise en commun et le débat. Comme l'ont montré Batteau et Clivaz (2023), la préparation des mises en commun a été le point clé de la réussite de cette leçon. Une préparation minutieuse de la tâche au tableau a été nécessaire pour faciliter le dialogue entre les élèves et s'est avérée un bon soutien pour l'enseignant dans le déroulement de sa leçon et dans le maintien des objectifs à atteindre.

La crainte de ne pas maîtriser le contenu des interventions des élèves, de ne pas pouvoir anticiper toutes les relances possibles peut bloquer les enseignants dans la mise en œuvre d'un débat mathématique en classe. Cette incertitude les déstabilise dans leur posture habituelle, ils doivent pouvoir rebondir sur les interactions imprévues des élèves et accepter des possibles qu'ils n'avaient pas envisagés. Par ailleurs, le débat mathématique a l'avantage de se situer sur des objets abstraits, l'affect personnel d'un individu n'est pas mis en jeu lors de ce type de débat. Ce dernier laisse place à une plus grande liberté d'expression des élèves, les valeurs d'un individu n'entrant pas dans ce type de débat.

À l'instar de tout apprentissage, cet objectif demande un entraînement régulier afin de développer une nouvelle posture des élèves et de l'enseignant.

En plus de l'entraînement au débat, ce type d'enseignement mène à la formation générale qui ne relève

> pas uniquement des disciplines scolaires et qui [fait] partie du projet de formation de l'élève. Notamment, elle rend visibles des apports éducatifs et met en évidence, entre autres, l'importance d'initier les élèves, futurs citoyens, à la complexité du monde, à la recherche et au traitement d'informations variées et plurielles, à la construction d'argumentations et au débat (CIIP, 2010a).

BIBLIOGRAPHIE

Balegno, M., Batteau, V., Bünzli, L.-O., Ceria, J., & Daina, A. (soumis). Des lesson study pour se coformer et constituer une équipe de formatrices et formateurs d'enseignant·es en mathématiques.

Batteau, V., & Clivaz, S. (2023). De la mise en commun à la mise en dialogue. *RMé, 239*, 27-39. https://doi.org/10.26034/vd.rm.2023.3624

Bergé, A. (2016). Déployer un raisonnement mathématique au secondaire : problèmes ouverts, formulation de conjectures et gestion de la classe. *Bulletin AMQ, 56*(4), 44-66.

Clivaz, S. (2015). Les Lesson Study ? Kesako ? *Math-Ecole, 224*, 23-26. http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/224-Clivaz.pdf

Conférence intercantonale de l'instruction publique. (2010a). Formation générale. In *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/pages/247

Conférence intercantonale de l'instruction publique. (2010b). Lexique Mathématiques et Sciences de la nature. In *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/domains/2

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique. (2010c). MSN 21 – Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace. In *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/learning-objectives/57

Conférence intercantonale de l'instruction publique. (2010d). *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/domains

Corminboeuf, I. (2024). *Aide-mémoire Mathématiques 9-10-11. Savoirs, savoir-faire et stratégies.* (LEP, Ed.). CIIP. https ://e.maths-m.ch/contenu/am/2019/index.php ?file=AM253.pdf

Corminboeuf, I., Mante, M., & Schild, H. (2019). *Aide-mémoire. Savoirs, savoir-faire et stratégies. Mathématiques 9-10-11* (LEP, Ed.). CIIP.

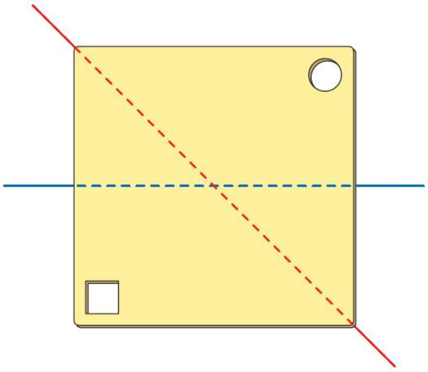
Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM, 10*, 123-159.

Tan, S., Fukaya, K., & Nozaki, S. (2018). Development of bansho (board writing) analysis as a research method to improve observation and analysis of instruction in lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies 7*(3), (230-247). https://doi.org/10.1108/IJLLS-02-2018-0011
Yoshida, M. (2005). Using Lesson Study to Develop Effective Blackboard Practices. In P. Wang-Iverson & M. Yoshida (Eds.), *Buiding Our Understanding of Lesson Study* (pp. 93-100). Research for Better Schools.

Annexe 1 Tâche originale ESPER *Après deux retournements* (avant l'errata 2024)

7^e^ / Espace / Transformations géométriques

E - F 63 Après deux retournements

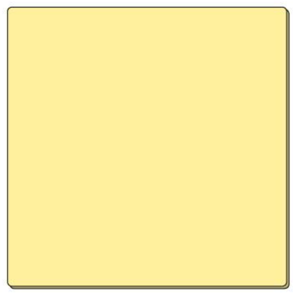


Un rond et un petit carré ont été percés dans ce carré jaune.

Le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

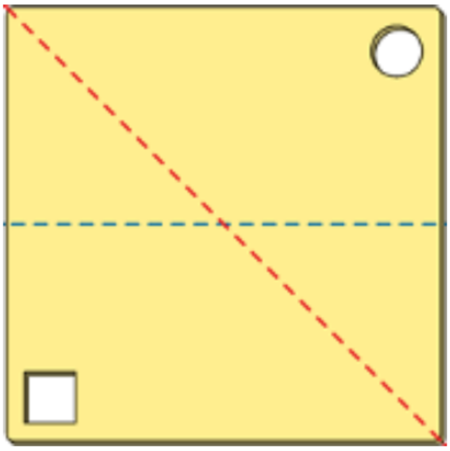
1. Dessine sur le carré ci-contre les emplacements du rond et du petit carré après ces deux retournements.
2. Dessine en vert sur le carré ci-contre l'axe de symétrie qui permet de passer de la position que tu as trouvée à celle du début en un seul retournement.



https://www.ciip-esper.ch/#/sequence/183/activite/4097/ressource/TYPE_MATH_ACTIVITE

Annexe 2 Fiche A, tâche *Après deux retournements* modifiée

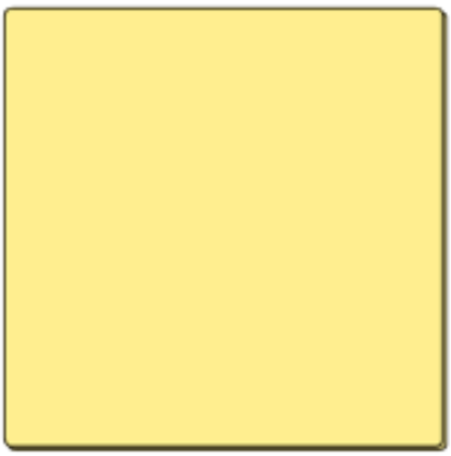
Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche A)



Un rond et un petit carré ont été marqués dans ce carré jaune.
Le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

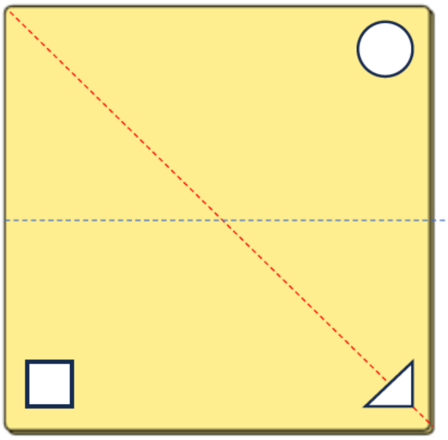
Dessine sur le carré ci-dessous le rond et le petit carré après ces deux retournements.



Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

Annexe 3 Fiche B, 1er prolongement de l'activité *Après deux retournements* modifiée

Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche B)

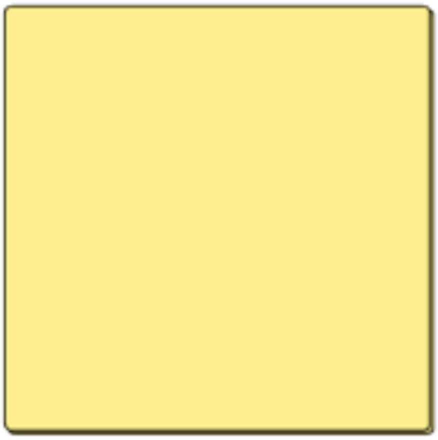


Un rond, un petit carré et un triangle ont été marqués dans le carré jaune.

Comme dans la fiche précédente, le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

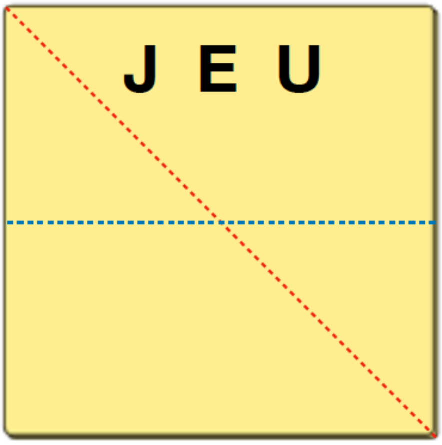
Dessine sur le carré ci-dessous le rond, le petit carré et le triangle après les deux retournements.



Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

Annexe 4 Fiche C, deuxième prolongement de l'activité *Après deux retournements* modifiée

Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche C)

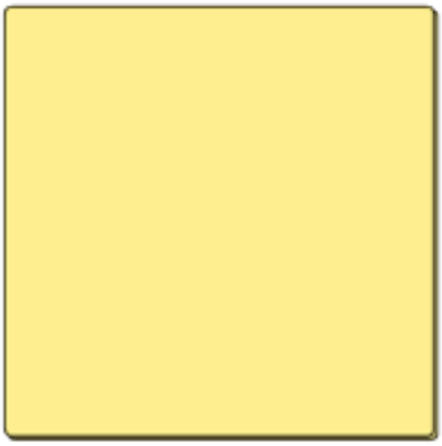


Les trois lettres J, E et U ont été marquées dans le carré jaune.

Comme dans les fiches précédentes, le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

Dessine sur le carré ci-dessous les trois lettres après les deux retournements.



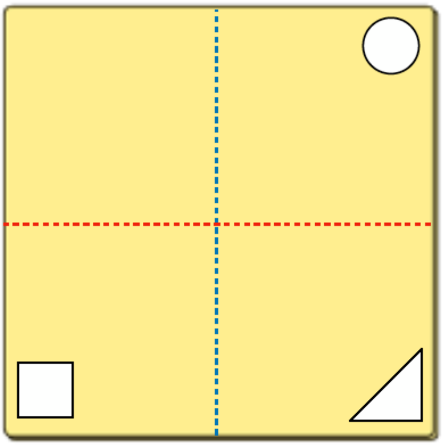
Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

____

Compare les trois situations que tu as trouvées et partage tes observations.

Annexe 5 Fiche B', différenciation de la fiche B pour les élèves ayant fini plus vite avec facilité

Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche B')

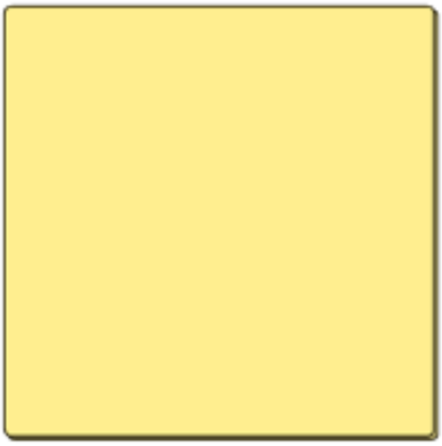


Un rond, un petit carré et un triangle ont été marqués dans le carré jaune.

Comme dans la fiche précédente, le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

Dessine sur le carré ci-dessous le rond, le petit carré et le triangle après les deux retournements.

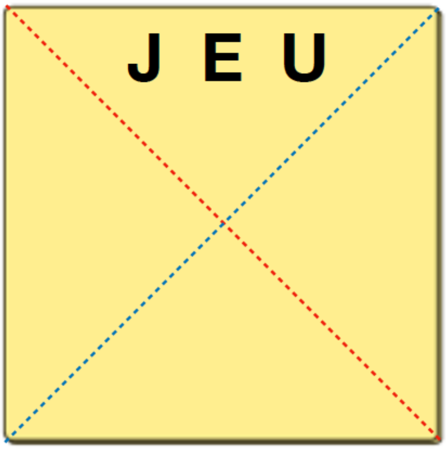


Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

____

Annexe 6 Fiche C', différenciation de la fiche B pour les élèves ayant fini plus vite avec facilité

Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche C')

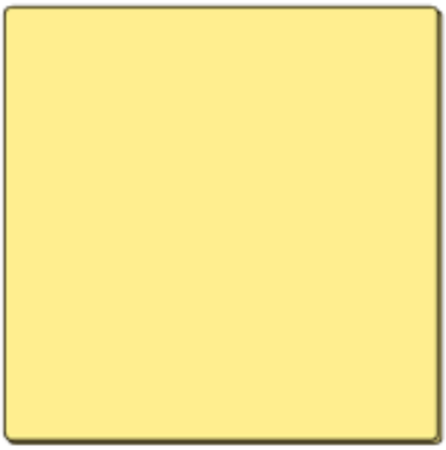


Les trois lettres J, E et U ont été marquées dans le carré jaune.

Comme dans les fiches précédentes, le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

Dessine sur le carré ci-dessous les trois lettres après les deux retournements.



Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?