

INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE EN 9H AVEC DES PROBLÈMES DE PREUVES

Amine Slim et Sylvie Coppé

Enseignant au Secondaire 1 – Établissement Léon-Michaud et Université de Genève

Résumé : Cet article constitue la suite de celui paru dans cette revue (Slim & Coppé, 2025) dans lequel nous relations une expérimentation, faite en 9H dans une classe du canton de Vaud, ayant pour but de donner du sens aux concepts algébriques. Nous avons élaboré une séquence d'enseignement sur l'introduction de l'algèbre en utilisant des problèmes de généralisation puis des problèmes de preuves basés notamment sur des programmes de calcul. Dans cette partie, nous allons particulièrement analyser les productions des élèves sur ces problèmes de preuves.

Mots clés : algèbre élémentaire, problèmes de preuve, programmes de calcul, distributivité de la multiplication sur l'addition, preuves pragmatiques/intellectuelles.

INTRODUCTION

Cet article fait suite à celui publié dans cette revue (Slim & Coppé, 2025), qui portait sur une expérimentation réalisée dans une classe de 9H du canton de Vaud. Cette expérimentation visait à élaborer une séquence pour introduire l'algèbre en donnant du sens aux concepts algébriques en permettant aux élèves de comprendre l'utilité de l'algèbre à la fois pour généraliser des situations et pour établir des preuves. Dans un premier article, nous avons analysé les productions d'élèves sur des problèmes de généralisation, ce qui nous a permis de conclure au potentiel didactique de ces problèmes. De la même façon, nous nous intéressons ici à l'analyse des productions des élèves sur des problèmes de preuve.

L'algèbre introduit des formes d'abstraction qui nécessitent un passage d'une pensée empirique et procédurale à une pensée structurale et déductive (Sfard, 1991). Autrement dit, les élèves passent d'une réflexion principalement basée sur des exemples concrets à une réflexion permettant d'identifier, de comprendre et de manipuler des concepts abstraits, de percevoir les relations entre les objets algébriques, et d'utiliser un raisonnement logique rigoureux pour généraliser et justifier leurs résultats.

L'apprentissage de la preuve en mathématiques, notamment lors de l'introduction à l'algèbre, se situe à la croisée de plusieurs enjeux didactiques majeurs. Selon Balacheff (1987), ce processus est marqué par la nécessité d'instaurer des outils cognitifs pour généraliser les régularités et valider les conjectures. En Suisse romande, dans le Plan d'Études Romand, la preuve est un axe du développement des compétences algébriques, visant à doter les élèves de méthodes de raisonnement rigoureuses tout en leur permettant d'accéder à une compréhension plus abstraite des objets mathématiques.

Dans cet article, nous examinons les résultats obtenus par 24 élèves de 9H confrontés à des problèmes basés sur des programmes de calcul, où l'objectif est de les amener à formuler des conjectures et à les démontrer. Nous nous posons la question suivante : dans quelle mesure les élèves sont-ils capables de mobiliser des procédures de preuve pour démontrer un résultat général et quelles sont-elles ? Les résultats offrent une perspective sur les défis spécifiques auxquels les élèves sont confrontés lorsqu'ils doivent conceptualiser des objets algébriques abstraits dans le cadre de la résolution de problèmes. En outre, ces résultats fournissent des pistes pour améliorer l'enseignement de l'algèbre en intégrant plus étroitement les concepts de généralisation et de preuve dans les apprentissages.

Cet article se structure en cinq parties. La première examine quelques approches contemporaines de l'enseignement de l'algèbre et l'importance de l'intégration des problèmes de généralisation et de preuve dans ce domaine. La deuxième partie présente rapidement le contexte de l'enseignement de l'algèbre en Suisse romande. Nous décrivons ensuite la séquence expérimentée et la méthode d'analyse des données

recueillies. Enfin, dans la dernière partie, nous proposons une analyse des processus de preuve employés par les élèves.

QUELQUES ÉLÉMENTS SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE

Pour commencer, nous rappelons certains éléments clés de la didactique de l'algèbre, comme la complexité inhérente à l'apprentissage de l'algèbre (et donc à son enseignement), déjà abordés dans notre travail antérieur (Slim & Coppé, 2025). Nous reprenons les conclusions des travaux de Grugeon (1997) sur les compétences clés pour maîtriser l'algèbre élémentaire, organisées en deux dimensions non indépendantes et non hiérarchisées, la dimension outil pour résoudre des problèmes et la dimension objet d'enseignement (les notions algébriques et leurs propriétés, les techniques de calcul) au sens de Douady (1986), soulignant ainsi la nécessité d'un équilibre entre ces deux aspects. Afin de renforcer l'attention portée à la dimension outil pour résoudre des problèmes, et d'approfondir la compréhension des nouveaux concepts mathématiques, Bednarz et al. (1996) ont suggéré quatre approches didactiques pour introduire l'algèbre, dont celle par la généralisation de modèles numériques et géométriques et la production de formules. Ces auteurs précisent que cette approche offre également la possibilité d'explorer le processus de validation de la généralisation produite. Les travaux de recherche sur l'importance de la preuve (Balacheff, 1987, 2019) mettent en lumière son rôle crucial dans le développement de compétences mathématiques et de la pensée critique chez les élèves, en soulignant également les défis et les approches nécessaires pour intégrer efficacement la preuve dans l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. Larguier (2015) ainsi que Bombrun-Nigon et Coppé (2014) s'appuient sur les travaux de Barallobres (2004) pour montrer que la démarche de preuve, dans le cadre d'un enseignement introductif de l'algèbre, est un outil permettant la validation des propositions mathématiques, renforçant ainsi la dimension « outil » de l'algèbre. En effet, l'apprentissage et la pratique de la preuve en mathématiques impliquent une variété de processus allant de la formulation de conjectures, la réfutation par la recherche de contre-exemples, l'exploration du domaine de validité d'une conjecture, l'identification de « patterns », à l'utilisation de diverses représentations, cadres, registres... (Ouvrier-Buffet, 2018). Cette diversité enrichit l'expérience mathématique des élèves et favorise le développement de compétences mathématiques. En engageant les élèves dans un processus de preuve, on les encourage notamment à être rigoureux et précis dans leur raisonnement, ce qui est crucial pour le succès dans les disciplines scientifiques et techniques.

LES PROGRAMMES DE CALCULS

La notion de programme de calculs (PC) revêt une grande importance dans les travaux en didactique de l'algèbre (Drouhard, 1992, 1995 ; Chevallard & Bosch, 2012 ; Assude et al., 2012).

La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de « faire un calcul », c'est-à-dire le fait d'opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme. (Drouhard, 1995, p. 167)

Les PC offrent un moyen efficace d'introduire progressivement la notion d'expression littérale. Ils servent également de lien entre l'approche procédurale du calcul littéral, qui se concentre sur les étapes à suivre pour effectuer des calculs, et l'approche structurelle, qui met l'accent sur la compréhension des relations et des structures sous-jacentes dans les expressions mathématiques. Enfin, les problèmes intégrant des programmes de calcul offrent un espace d'exploration riche, favorisant l'engagement dans une démarche de recherche fondée sur les essais, les conjectures et la formulation de preuves ou l'utilisation de contre-exemple.

QUELQUES ÉLÉMENTS SUR LE CONTEXTE DE LA SUISSE ROMANDE

Nous allons maintenant donner quelques précisions sur l'organisation de l'enseignement de l'algèbre en Suisse romande (et notamment dans le canton de Vaud) en examinant la place donnée aux activités de preuve et aux programmes de calculs.

Les objectifs d'apprentissage de l'algèbre au secondaire 1, tels que définis par le Plan d'Études Romand, sont majoritairement abordés dans la partie MSN 33 "Fonction et Algèbre", spécifiquement dans la composante 5, qui vise à "Résoudre des problèmes numériques et algébriques en mobilisant l'algèbre comme outil de calcul (équations), de preuve ou de généralisation", incluant « l'utilisation du calcul littéral comme outil de preuve dans des situations simples », ce qui montre que le plan d'études ne néglige pas les preuves en algèbre.

Dans le canton de Vaud, on note une concentration significative de l'enseignement de l'algèbre durant les années de 10H et 11H alors qu'une introduction succincte à l'algèbre est effectuée en 9H avec seulement 10 périodes dédiées sur un total de 160, ce qui représente 6,25 % du volume horaire annuel. En revanche, en 10H, l'algèbre représente 25 % des périodes annuelles, tandis qu'en 11H, cette proportion atteint 31,25 % des 160 périodes prévues.

L'analyse des Moyens d'Enseignement Romands (MER) permet de mettre en évidence que les problèmes utilisant le calcul littéral sont particulièrement proposés en 11H et qu'il ne figure aucun problème de preuve en 9H dans la partie calcul littéral du thème Fonctions et algèbre. Notons que le chapitre « Nombres naturels et décimaux » propose un seul problème basé sur la notion de contre-exemple (NO51, p. 21). Il existe seulement un exercice en 10H, dans le chapitre « calcul littéral » en guise d'introduction pour prouver la validité de conjectures dans le domaine numérique (FA150, Livre p. 107).¹ et à peine moins de 10 exercices en 11H.

En conclusion et à la suite de nos observations précédentes (Slim & Coppé, 2025), nous mettons en évidence une prédominance de la résolution d'équations et de la notion de fonction tout au long du cycle, reléguant les problèmes de généralisation et de preuves à un rôle secondaire, notamment en début de cycle. De plus, l'algèbre est principalement abordée sous son aspect "objet", en particulier en 9H, avec une focalisation sur les techniques de calcul et une intégration limitée de la résolution de problèmes, témoignant d'une approche formelle de l'algèbre. Compte tenu de ces constats, nous avons élaboré et expérimenté une séquence d'introduction à l'algèbre intégrant des problèmes de généralisation et de preuves. C'est ce que nous allons présenter à présent.

LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Cette séquence, proposée en 9H, s'appuie sur un ensemble de sept séances interconnectées (voir annexe 1) et est structurée en quatre phases distinctes. La première phase (deux séances), est consacrée au calcul réfléchi. Nous avons proposé cette phase pour nous assurer que les élèves maîtrisaient suffisamment la distributivité de la multiplication sur l'addition dans un contexte numérique, afin de présenter la distributivité comme une propriété justifiant la transformation des expressions littérales (Assude et al., 2012).

La seconde phase, correspondant aux séances 3 et 4², se concentre sur les problèmes de généralisation. L'objectif était d'introduire la notion de formule et d'expressions littérales qui pouvaient être transformées grâce aux propriétés des opérations et notamment de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

La troisième phase, qui comprend les séances 5 et 6, est axée sur la preuve en algèbre à travers l'étude de l'équivalence de programmes de calcul (voir annexe 2). L'objectif est d'amener les élèves à formuler et à démontrer des conjectures en utilisant le calcul littéral comme outil de preuve. Inspirés des travaux de Bombrun-Nigon et Coppé (2014), nous avons conçu des problèmes basés sur des programmes de calcul

¹ Nous excluons le FA177 que nous considérons comme un exercice de généralisation et non de preuve contrairement aux auteurs des MER.

² C'est cette phase qui est l'objet du premier article (Slim & Coppé, 2025)

pour favoriser la généralisation et la validation des conjectures. Cette approche progressive guide les élèves vers la formulation puis la démonstration de ces conjectures.

La quatrième et dernière phase, réalisée deux semaines après la dernière séance, est une évaluation, composée d'exercices et de problèmes qui rappellent ceux abordés lors de la séquence d'enseignement.

Nous allons maintenant analyser en détail les programmes de calcul proposés dans cette séquence. Cette analyse portera sur les similitudes et les différences entre les programmes, ainsi que sur leur progression en termes de complexité et d'autonomie laissée aux élèves, tout en soulignant les implications didactiques de ces choix.

ANALYSE DES PROBLÈMES PROPOSÉS

Les problèmes de preuves à partir de PC (voir en annexe 2) utilisés dans cette expérimentation visent à faire évoluer les élèves de la généralisation à partir de quelques tests numériques à l'élaboration d'une preuve utilisant éventuellement le calcul littéral. Tous les problèmes, y compris ceux des évaluations, construits sur le même modèle sauf Eval.PC2, partagent un même objectif : amener les élèves à identifier des régularités dans des suites d'opérations, formuler des conjectures et prouver ces conjectures. Le raisonnement inductif, présent dans chaque énoncé, permet aux élèves de passer de la manipulation concrète des nombres à la formalisation abstraite. Enfin, pour entrer dans un processus de preuve, il est nécessaire que les élèves fassent des transformations des expressions littérales et maîtrisent, par exemple, la distributivité de la multiplication sur l'addition. Les PC sont conçus avec une complexité croissante, tant au niveau des opérations requises que des concepts algébriques impliqués.

Dans PC1 les opérations sont simples et s'enchaînent sans utiliser les règles de priorité des opérations. Ce programme initialise le processus de réflexion mathématique en introduisant une régularité facilement observable facilitant la conjecture (le PC donne toujours 8, quel que soit le nombre choisi).

Dans PC2, le programme de calcul donne toujours deux fois le nombre choisi au départ, ce qui peut engendrer des difficultés dans la reconnaissance et l'expression de la conjecture. De plus, les calculs ne sont plus aussi simples et si les élèves mobilisent des écritures littérales, ils devront utiliser des propriétés, dont la distributivité de la multiplication sur l'addition, pour les transformer.

Pour PC3, plusieurs formulations peuvent être utilisées pour les conjectures, certaines portant sur le caractère procédural (par exemple, on multiplie le nombre par 2 et on ajoute 1), d'autres sur le caractère structural (par exemple, c'est un nombre impair ou c'est 1 de plus que le double). Dans ce dernier cas, la reconnaissance de la forme $2n+1$, caractéristique d'un nombre impair peut être une connaissance non disponible chez des élèves de 9H.

Dans PC4, il y a 3 programmes à comparer. Les deux nombres à tester amènent au même résultat 0 sans que les 3 programmes soient pour autant tous équivalents (seuls les deux premiers le sont). Par ces choix de variables, nous souhaitons introduire la notion de contre-exemple qui est cruciale pour faire évoluer le raisonnement des élèves vers une pensée mathématique rigoureuse et déductive.

EvalPC.1 propose une série d'opérations algébriques complexes conçues pour ramener systématiquement au nombre initial choisi par l'élève. En cela, nous nous assurons que les élèves maîtrisent les propriétés des opérations et les manipulations de base des expressions algébriques. L'étape où l'on double $2n+5$ pour obtenir $4n+10$ nécessite l'application correcte de la propriété distributive de la multiplication sur l'addition. Enfin, la réorganisation des termes lors de la simplification nécessite l'utilisation des propriétés d'associativité et de commutativité, essentielles en algèbre.

EvalPC.2 est un problème qui se distingue un peu des autres puisqu'il est formulé de manière un peu différente et qu'il comporte une difficulté importante, à savoir exprimer trois nombres consécutifs. Même si on peut penser que ce problème est un peu trop difficile pour une évaluation, nous souhaitons tester si les élèves pouvaient transférer le travail fait lors de PC3.

ANALYSE DES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

Nous allons maintenant analyser les productions des élèves en distinguant les essais, les conjectures produites et les preuves. Pour ces dernières, nous utilisons la typologie proposée par Balacheff (1987) qui distingue deux grandes catégories de preuves : les preuves pragmatiques ancrées dans l'action, l'observation et l'expérimentation, et les preuves intellectuelles caractérisées par un raisonnement abstrait et éventuellement formel.

Dans les preuves pragmatiques, il distingue :

- L'empirisme naïf qui consiste ici à effectuer des tests sur quelques nombres pour trouver une conjecture puis de se servir de ces exemples pour généraliser en indiquant que si cela fonctionne pour ces nombres, cela fonctionnera pour tous les nombres.
- L'expérience cruciale permet, une fois la conjecture établie à partir de quelques nombres, de la généraliser en choisissant un ou des nombre(s) "compliqué(s)" (comme un nombre très grand ou un nombre négatif) en pensant que si la règle fonctionne pour ce nombre, elle fonctionnera pour tous les nombres.
- L'exemple générique permet d'utiliser un exemple spécifique pour mettre en œuvre un raisonnement général. Ainsi les exemples choisis ne sont pas particulièrement importants en eux-mêmes, mais servent à appuyer le raisonnement général. Par exemple pour PC3, question c : si je prends un nombre quelconque comme 7, et que j'ajoute le nombre suivant, qui est 8, alors j'additionne en fait $7 + 7 + 1$. $7 + 7$ est 14 qui est un nombre pair et si j'ajoute 1, on obtient un nombre impair.

Balacheff (1987) définit ensuite les preuves intellectuelles :

- L'expérience mentale : les élèves essaient de raisonner mentalement en invoquant l'action, par exemple en traduisant les opérations en phrases telles que : pour n'importe quel nombre si j'ajoute son suivant, je sais que l'un est pair et l'autre impair, donc si j'ajoute un pair et un impair, le résultat sera toujours impair.
- La démonstration : pour le thème mathématique étudié, les élèves utilisent le calcul littéral pour prouver.

Enfin Balacheff (1987) ajoute qu'un pont peut être envisagé entre les preuves pragmatiques et les preuves intellectuelles :

C'est là, quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Une marque de ce passage est une évolution des moyens langagiers mis en œuvre. (Balacheff, 1987, p. 165)

Dans le cadre de l'introduction à l'algèbre, cette distinction est cruciale pour comprendre comment les élèves passent de procédures basées sur des exemples à une approche plus globale et formalisée, reflétant ainsi leur progression vers une généralisation algébrique. Nous considérons que la mobilisation des types de preuves par les élèves et l'évolution de leurs usages seront des marqueurs importants du développement de compétences algébriques des élèves, mais c'est également un levier pour leur montrer l'utilité de l'algèbre.

LES RÉSULTATS

Le nombre d'élèves présents durant la séquence a varié entre 22 et 24. Les élèves ont principalement travaillé de manière individuelle sur les problèmes proposés, nous avons recueilli toutes les productions écrites. En raison de contraintes temporelles, la sixième séance prévue n'a pu être réalisée. La cinquième séance, quant à elle, s'est déroulée dans un contexte de remplacement, avec des conditions d'expérimentation moins favorables et en l'absence de l'enseignante. Finalement seuls les deux premiers programmes de calcul ont pu être abordés en classe et sont analysés ici. Pour chaque programme, nous analysons successivement les essais, les conjectures et les preuves. Ces dernières sont classées selon la typologie de Balacheff. Dans la colonne « démonstration ou tentative de démonstration », nous avons

choisi de comptabiliser à la fois les démonstrations correctes (même si les critères formels ne sont pas toujours respectés), incorrectes et les tentatives non abouties à partir du moment où les élèves ont utilisé des expressions littérales pour exprimer le PC.

Analyse des productions des élèves sur PC1 et PC2.

La séance, avec 23 élèves, a débuté par une régulation pour PC1, car rapidement, nous avons observé une mauvaise interprétation de l'instruction « ajouter 8 » puisque certains élèves ont pensé qu'ils devaient concaténer 8 avec le nombre précédent (double du nombre de départ). Passée cette erreur initiale classique (Booth, 1985), les élèves se sont investis dans la tâche et ont rapidement saisi les consignes des questions a et b (commune aux 2 PC), parvenant à effectuer des tests avec plus de deux nombres et à formuler des conjectures.

Ils ont pu alors tester plusieurs nombres et formuler leurs premières conjectures. Sur PC1, les 23 élèves ont effectué au total 59 essais. Parmi eux, deux comportaient une erreur de calcul. 18 élèves ont émis une conjecture, dont 16 correctes. Pour PC2, on recense 56 essais au total et seulement 2 erreurs. Là encore, 18 élèves ont formulé une conjecture et cette fois toutes se sont avérées justes.

Dans les conjectures, le mot « toujours » revient régulièrement (comme dans l'exemple à gauche ci-dessous), ce qui semble montrer qu'il y a un premier passage à la généralisation. Certains élèves (comme sur l'exemple ci-dessous à droite) ont même constaté que PC2 ne se comportait pas comme PC1 (le nombre est une constante ou bien fonction du nombre de départ).

Exemple de conjecture PC1	Exemple de conjecture PC2
b. Que remarques tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ? <i>On revient à 8 Le résultat est toujours 8</i>	b. Quelle conjecture peut-on formuler ? <i>Ce n'est pas le même résultat, mais c'est le double du nombre de départ</i>

Tableau 1 – Exemples de conjectures pour PC1 et PC2 par deux élèves différents

En ce qui concerne les preuves, un nombre important d'élèves, 7 pour PC1 et 5 pour PC2, n'ont rien produit. Pour PC1, les 10 démonstrations sont justes. Pour PC2 il y en a seulement 10 qui sont justes, 5 sont fausses (les élèves n'ont pas traduit le PC correctement ou ils ont utilisé des règles de calcul incorrectes) et 2 élèves affirment seulement l'égalité de l'expression traduisant le PC et de leur conjecture (voir les exemples ci-dessous). Ces résultats peuvent témoigner d'une appropriation des notions introduites lors des séances précédentes sur la généralisation par une partie des élèves.

PC	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle	
	Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Démonstration ou tentative de démonstration
PC1	1	/	/	5	10
PC2	1	/	/	0	17

Tableau 2 – Répartition des preuves utilisées par les élèves pour PC1 et PC2

L'analyse révèle également un recours plus marqué aux expressions littérales pour PC2 (17 occurrences contre 10 pour PC1). Cela peut refléter soit une plus grande aisance acquise après PC1, soit le fait que la complexité de PC2 incite davantage d'élèves à formuler un raisonnement littéral ou déductif pour justifier leur résultat. En effet, dans PC1, la régularité du résultat (toujours 8) repose sur des relations simples, et favorise l'élaboration de preuves autant pragmatiques qu'intellectuelles. En revanche, dans PC2, le

raisonnement est plus complexe puisqu'il est difficile pour les élèves d'expliquer pourquoi cette règle est toujours vraie sans une bonne maîtrise des concepts algébriques sous-jacents.

Pour illustrer les différents types de preuves, voici quelques exemples tirés des productions des élèves pour PC1. E1 (empirisme naïf) ajoute un calcul à ses quatre précédents pour convaincre de la véracité de sa conjecture. Il teste différents nombres de départ (3, 15, 20, 13...) et constate trois résultats égaux à 8, un erroné à -2, sans forcément le questionner ou le prendre en compte pour sa conjecture. E22 (expérience mentale) essaie d'expliquer le mécanisme de calcul sous-jacent car il a remarqué qu'une fois les calculs faits $2x$ est annulé par la soustraction du double du nombre de départ. E3 et E4 ont effectué une démonstration (même si la forme n'est pas encore experte) en traduisant le PC en une expression littérale qu'ils transforment et ils obtiennent 8 (à noter que E4 a choisi le double du nombre de départ comme variable).

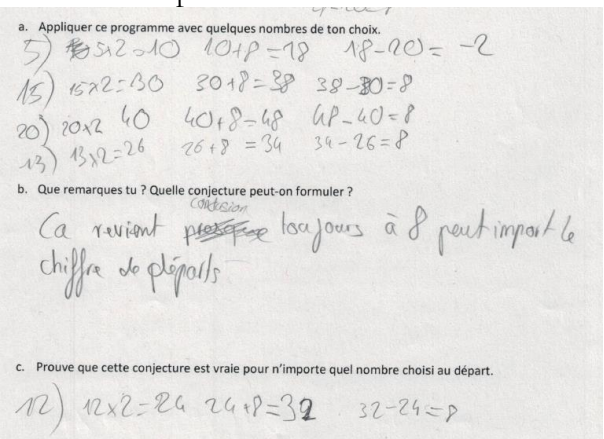
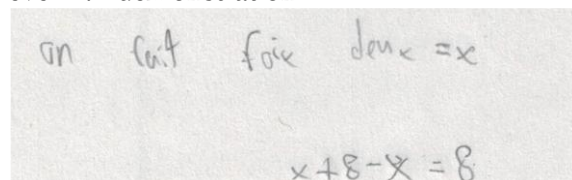
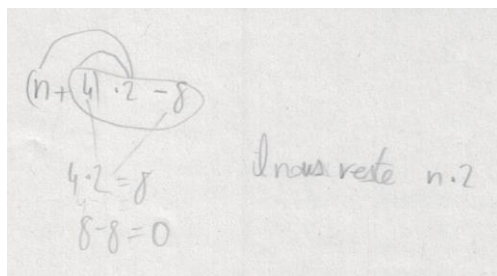
Élève E1 : empirisme naïf  a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix. 5) $5 \times 2 = 10$ $10 + 8 = 18$ $18 - 20 = -2$ 15) $15 \times 2 = 30$ $30 + 8 = 38$ $38 - 30 = 8$ 20) $20 \times 2 = 40$ $40 + 8 = 48$ $48 - 40 = 8$ 13) $13 \times 2 = 26$ $26 + 8 = 34$ $34 - 26 = 8$ b. Que remarques-tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ? Ca revient presque^{constamment} toujours à 8 peu importe le chiffre de départ c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ. 12) $12 \times 2 = 24$ $24 + 8 = 32$ $32 - 24 = 8$	Élève E22 : expérience mentale On obtient toujours 8. Quelque chose fait en sorte que dans le calcul on +8, mais que le reste du calcul donne 0.
Élève E3 : démonstration $X \cdot 2 + 8 - X \cdot 2 = X \cdot 2 - X \cdot 2 + 8 = 0 + 8 = 8$ X = nombre choisi au départ	Élève E4 : démonstration  on fait fois deux $= x$ $x + 8 - x = 8$

Tableau 3 – Des exemples de preuves selon la typologie de Balacheff pour PC1

L'analyse de ces productions a également porté sur l'utilisation de la distributivité pour transformer les expressions littérales dans le problème PC2. Comme indiqué plus haut, 10 élèves montrent une application correcte de la distributivité pour simplifier l'expression du programme de calcul et ainsi démontrer la conjecture, avec toutefois des écritures qui ne sont pas encore complètement formalisées comme dans l'exemple suivant où E12 développe $(n+4) \cdot 2$, par « morceaux » puis simplifie l'expression en identifiant des termes qui s'annulent et en constatant qu'il ne reste que $2n$. À noter que cet élève n'utilise pas le signe $=$.



$(n+4) \cdot 2 = 8$

$4 \cdot 2 = 8$

$8 - 8 = 0$

Il nous reste $n \cdot 2$

Fig. 1 : Production Élève E12

5 élèves n'ont pas réussi à démontrer comme E5 qui a traduit les calculs par étapes et a utilisé plusieurs variables, dont certaines pour désigner un résultat intermédiaire (nous avons déjà constaté cela pour les

formules de généralisation). Bien que cette approche montre une tentative de formalisation, elle ne lui permet pas de démontrer la conjecture.

c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

$x = \text{le double du nombre de départ}$
 $n = \text{nombre choisie}$
 $r = \text{resultat}$
 $n + 4 \cdot 2 = 8$
 $(n + 4) \cdot 2 = r$
 $r - 8 = x$

Après la 2^e étape, chaque nombre choisi a une somme différente, donc si on enlève 8 à chaque nombre obtenu qu'ils sont différents ils ne vont pas donner le même résultat.

$(n + 4) \cdot 2 = r$
 $r - 8 = x$

$\Rightarrow$

$n = \text{nombre choisie}$
 $r = \text{resultat obtenu}$
 $x = \text{le double du nombre de départ}$

Fig. 2 : Production Élève E5

Enfin 2 sont restés bloqués sur leur première expression littérale sans tenter de la transformer, comme dans l'exemple ci-dessous où l'élève a en plus introduit deux variables. On peut faire plusieurs hypothèses pour l'expliquer : ils ont pensé qu'écrire l'égalité suffisait pour la prouver ou bien ils ne savaient pas transformer leur expression littérale et se sont arrêtés.

c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

$$4 + x \times 2 - 8 = 2n$$

Fig. 3 : Production Élève E14

Analyse de EvalPC.1

Sur 23 élèves, seulement 20 ont émis une conjecture. Parmi elles, 17 sont correctes et 3 sont erronées en raison soit d'erreurs de calcul ayant amené à une conjecture différente (par exemple, « toujours le nombre départ quand il est pair »), soit d'un oubli d'une étape du programme.

Voici le tableau récapitulatif des différentes preuves utilisées.

PC	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle	
	Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Démonstration ou tentative de démonstration
Eval PC.1	4	0	0	2	13

Tableau 4 : Les preuves utilisées pour EvalPC.1

Il est à noter que seulement 4 élèves n'ont pas produit de preuve et que 4 autres utilisent encore l'empirisme naïf. Sur les 13 élèves qui ont fait des tentatives de démonstrations, 3 ont produit des démonstrations correctes, en mobilisant la distributivité de manière adéquate alors que 5 l'ont mal utilisée comme dans l'exemple ci-dessous. E2 a tout d'abord une expression littérale incorrecte puisqu'il n'a pas tenu compte de la priorité des calculs, ensuite il regroupe de façon incorrecte certains termes pour les additionner et enfin il fait une erreur de calcul qui lui permet d'arriver au résultat voulu.

$$(2n+5) \cdot 2 - 3n - 10 = n$$

$$2n - 3n = n$$

Fig. 4 : Production Élève E2

Nous avons constaté que certains élèves continuaient à faire des calculs en ligne comme E10 ci-dessous qui traduit le PC pas à pas et arrive à conclure.

3. $N = 2$ importe quel nombre positif

$$N \cdot 2 = 2N$$

$$2N + 5 = 2N + 5$$

$$(2N + 5) \cdot 2 = 4N + 10$$

$$(4N + 10) - (3N) = N + 10$$

$$N + 10 - 10 = N$$

Fig. 5 : Production Élève E10

Enfin 5 élèves ont su passer du programme de calcul à une expression littérale (pas toujours juste) mais ensuite, pour la preuve, comme on l'a vu pour PC2, ils ont seulement affirmé l'égalité de cette expression avec leur conjecture comme on peut le voir dans les productions suivantes dont 2 comportent des erreurs dans l'expression littérale.

$$(n \cdot 2 + 5) \cdot 2 - n \cdot 3 - 10 = n$$

$$3(2x+5) + (2x) - (3x) - 10 = x$$

$$N \cdot 2 + 5 \cdot 2 - N^3 - 10 = N$$

Fig. 6 : Exemples de productions erronées - EvalPC.1

Ces différentes productions sont révélatrices des difficultés propres à l'entrée dans l'apprentissage de l'algèbre. Si ces élèves ont fait un pas vers la généralisation, ils semblent encore percevoir les expressions littérales comme des entités statiques, dépourvues de leur caractère manipulable et susceptibles d'être soumises à des opérations algébriques. De plus ils sont encore dans l'interprétation du signe "=" comme un opérateur de résultat, plutôt que comme une relation d'équivalence entre deux expressions. Ces conceptions limitent leur capacité à transformer et à démontrer une égalité. Cette observation est cohérente avec les travaux de Kieran (1981), qui soulignent ces obstacles conceptuels fréquents lors de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. Par ailleurs, l'énoncé demandant de « prouver » une conjecture, sans préciser les modalités de la démonstration attendue, peut avoir conduit certains élèves à supposer que la simple écriture de l'expression littérale suffisait pour valider leur raisonnement.

Analyse de EvalPC.2

L'analyse de EvalPC.2 met en évidence une difficulté plus grande de cet exercice, ce qui est conforme à notre analyse *a priori*. Les tests numériques ont été effectués correctement par tous. Cependant, la recherche de la conjecture a nécessité davantage de tests que pour le programme précédent et a semblé plus difficile à identifier.

2 élèves n'ont pas produit de conjecture, tandis que les 21 autres se répartissent selon les catégories suivantes :

Conjecture erronée (par ex. « multiple de 6 »)	« Il n'existe pas de conjecture »	Multiple de 3	Le triple du nombre du milieu
4	1	6	10

Tableau 5 : Les différentes conjectures EvalPC.2

Seulement 16 élèves ont tenté d'établir une démonstration (y compris un élève qui n'avait pas fait de conjecture), avec seulement 4 justes, 4 fausses et 8 ne comportant qu'une égalité comme déjà vu sur les autres PC (par exemple, 4 élèves ont écrit une égalité du type $m+n+o = 3n$ sans aucune justification).

PC	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle	
	Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Démonstration ou tentative de démonstration
Eval PC.2	4	0	0	0	16

Tableau 6 : Les preuves utilisées dans EvalPC.2

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, nous avons constaté la difficulté (structurale) des élèves pour désigner trois nombres entiers consécutifs. Voici les différentes écritures produites.

$n, n+1$ et $n+2$	$n-1, n$ et $n+1$	3 lettres qui se suivent : par exemple m, n et o ou A, B et C	n, n et n	n, m et n
1	3	10	1	1

Tableau 7 : Les différentes écritures de 3 entiers consécutifs

On trouve de façon importante et classique l'utilisation soit de la lettre n qui représente toutes les variables, soit de trois lettres qui se suivent dans l'ordre alphabétique comme sur les deux exemples qui suivent. E9 considère les nombres m, n et o en indiquant que ces nombres se suivent, puis il écrit que la somme est 3 fois le 2^e nombre, ce qui correspond à sa conjecture. Bien sûr cet élève ne peut pas aller plus loin puisqu'aucun travail mathématique ne peut être fait sur la somme même si l'élève qualifie bien les trois nombres.

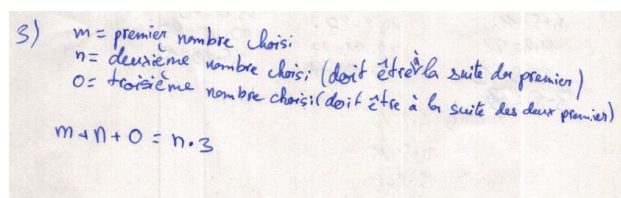


Fig. 7 - Production Élève E9

E8, choisit également A, B et C pour désigner les 3 entiers consécutifs, mais ensuite il met en place un raisonnement différent de E9, car il prend en compte que la somme des deux nombres extrêmes (A et C) est égale à deux fois le nombre du milieu (B), ce qui lui permet de conclure que la somme totale est 3B. Bien que les lettres utilisées ne permettent pas d'effectuer des calculs pertinents, le raisonnement sous-

jacent est correct, montrant une utilisation intuitive des relations entre les nombres (on est ici dans le cas d'une expérience mentale combinée avec une utilisation de symboles algébriques qui ne peuvent pas se suffire à eux-mêmes pour avoir une signification algébrique).

$$\begin{array}{l} A + B + C \\ A + C = 2B \\ 2B + B = 3B \end{array}$$

Fig. 8 : Production Élève E8

Pour terminer, voici une production particulière dans laquelle on constate que E18 utilise des abréviations pour désigner les nombres et alterne le signe + et le ;. De plus, il remarque que lorsqu'on a trois entiers consécutifs l'un est multiple de 3. Cet élève tente également de combiner des écritures littérales et une expérience mentale.

$$\begin{array}{l} 3nC = 3 \text{ entiers consécutifs} \\ n = \text{nombre} \\ m3 = \text{multiple de } 3 \\ n;n;n = 3nC \\ 3nC = 1.m3 + n;n \\ 2nC = m3 \\ m3 + m3 = m3 \end{array}$$

Fig. 9 : Production Élève E18

Bien sûr, la désignation des trois nombres consécutifs a significativement influencé la capacité des élèves à formuler et à prouver la conjecture de manière rigoureuse. Comme anticipé, EvalPC.2 s'est révélé plus difficile que EvalPC.1, avec une augmentation notable des absences de preuve et une utilisation des preuves pragmatiques comme indiqué dans le tableau 6.

En l'état, cet exercice peut être trop complexe pour certains élèves si les apprentissages en jeu (sur la mobilisation d'expressions littérales ou sur la démonstration en algèbre) n'ont pas été suffisamment consolidés. Il pourrait trouver sa place dans une évaluation si des activités préparatoires et un soutien plus guidé étaient proposés pour accompagner les élèves dans leur transition vers des preuves plus formelles et abstraites, ce que nous n'avons pas pu réaliser faute de temps.

CONCLUSION ET DISCUSSION

Cette séquence, axée sur l'introduction de problèmes de généralisation et de preuve en 9H, a mis en lumière des résultats prometteurs pour amener les élèves à formuler des conjectures et à s'engager dans des processus de preuve. Les productions des élèves, dans leur diversité, montrent qu'ils s'approprient progressivement les outils algébriques et développent leur raisonnement mathématique.

Les élèves ont démontré une aptitude à résoudre des problèmes de preuve et ont progressé dans leurs raisonnements mathématiques, évoluant vers une approche plus formelle déjà initiée par les séances sur les problèmes de généralisation. Cette évolution positive souligne le potentiel de l'introduction de ces problèmes au début de l'apprentissage de l'algèbre. Toutefois, des difficultés subsistent notamment sur la

manipulation des expressions algébriques, notamment dans l'utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Comme nous l'avons souligné dans le premier article (Slim & Coppé, 2025), le travail fait en amont sur la distributivité n'est pas suffisant. Nous pensons donc qu'il est important d'intégrer et d'articuler le travail sur le sens et sur les aspects techniques dans les débuts de l'enseignement de l'algèbre et sur un temps long.

De la même façon, nous redisons que notre expérimentation s'est faite dans des contraintes temporelles fortes qui n'ont pas permis de travailler suffisamment en profondeur les différents types de problèmes et de réinvestir ce qui a été appris. C'est encore plus marqué pour ces deux séances puisque nous avons dû supprimer deux problèmes sur quatre. Ainsi, il nous semble qu'il y avait trop de différences de complexité entre les deux problèmes travaillés et ceux donnés en évaluation, ce qui rend les résultats de notre évaluation fragiles. Mais tout de même, les élèves ont mobilisé le calcul littéral et ont produit des preuves, pas toujours correctes, mais qui témoignent de connaissances en construction. Un des objectifs de cet article est de donner des informations aux enseignants et enseignantes qui voudraient utiliser cette séquence sur ce qu'ils peuvent attendre des élèves, sur les erreurs prévisibles et sur les points d'attention à développer.

De façon plus générale, il nous semble que pour améliorer l'enseignement de l'algèbre, il est essentiel d'adopter une approche équilibrée entre les dimensions « objet » et « outil » de l'algèbre. Notre expérimentation montre qu'il est possible de combiner des exercices formels avec des activités pratiques de généralisation et de preuve. L'utilisation des programmes de calcul s'est révélée particulièrement féconde pour engager les élèves dans une démarche de recherche, les amenant à formuler des conjectures, à les tester et à élaborer des preuves, même partielles. Cette approche a permis aux élèves de développer une compréhension plus profonde des concepts algébriques et de renforcer leurs compétences en raisonnement mathématique, tout en se confrontant aux exigences de la validation en algèbre.

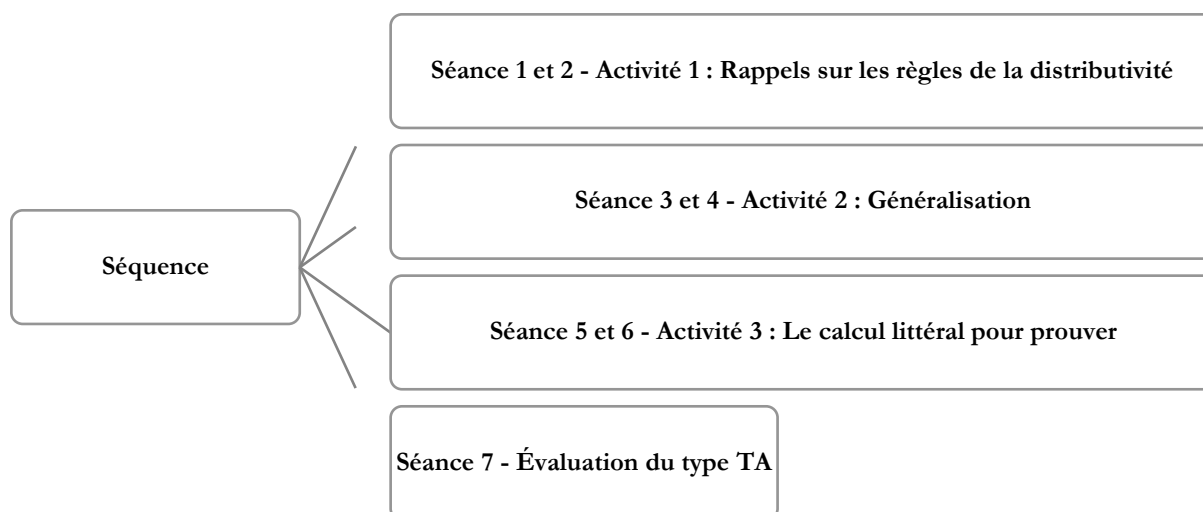
BIBLIOGRAPHIE

- Assude, T., Coppé, S., & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : Atomisation et réduction. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives* (pp. 41-62). La pensée sauvage.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Balacheff, N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *XXVI^e Colloque CORFEM*. <https://hal.science/hal-02981131>
- Barallobres, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 285-328.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Dans N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 3-12). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_1
- Bombrun-Nigon, C., & Coppé, S. (2014). La "preuve pour comprendre", un levier pour la construction du sens de la lettre en classe de Cinquième. *Repères IREM*, 94, 9-30.
- Booth, L. (1985). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, 5, 5-17.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives* (pp. 13-33). La pensée sauvage.
- Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot-Paris VII.
- Drouhard, J.-P. (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. *Actes de la 8^e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, 325-344.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(2), 167-210.

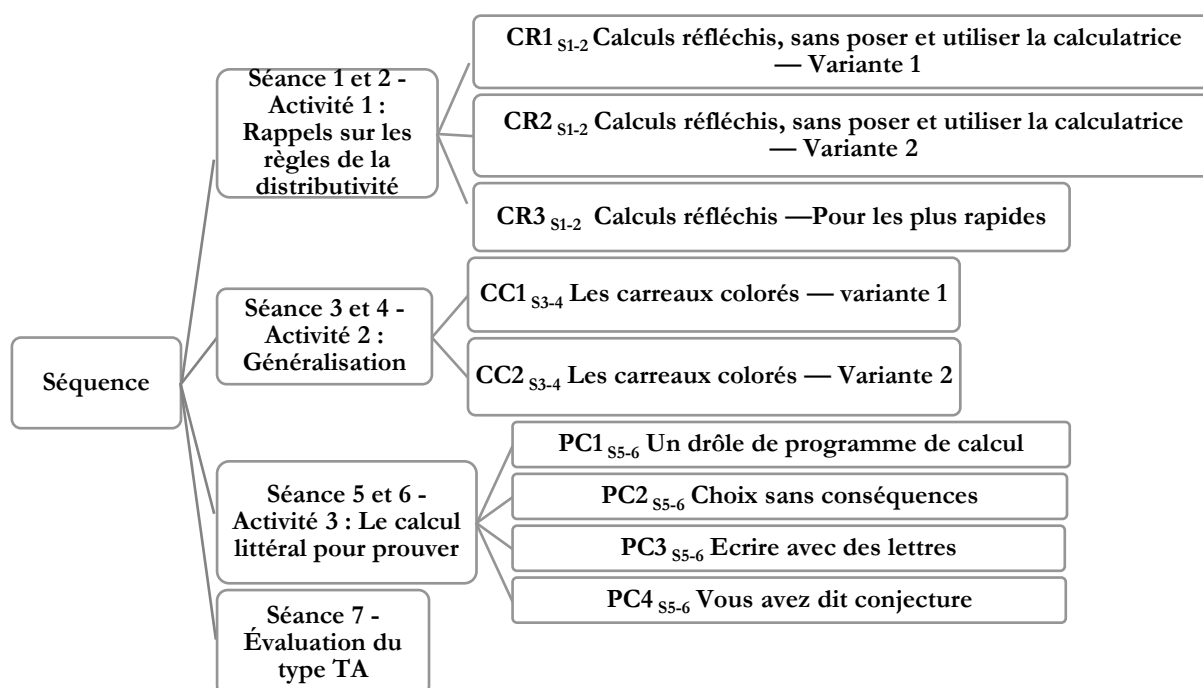
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326.
- Larguier, M. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. In L. Theis (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage—Actes du colloque EMF2015* (pp. 313-333).
- Ouvrier-Buffet, C. (2018). Quels outils pour analyser l'activité de preuve en mathématiques à l'école primaire ? Propositions à partir d'une situation de recherche en CM1/CM2. Dans J. Pilet & C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018*. <https://hal.science/hal-03452844>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Slim, A. & Coppé, S. (2025). Introduction de l'algèbre en 9H avec des problèmes de généralisation. *Revue de Mathématiques pour l'école*, 242, 3-18.

ANNEXE 1

Description Détaillée de la Séquence d'Enseignement



Les séances



ANNEXE 2

Voici les 4 PC qui ont été utilisés :

PC1. Un drôle de programme de calcul • Choisir un nombre. • Multiplier ce nombre par 2. • Ajouter 8 au résultat. • Soustraire (retrancher) le double du nombre de départ. a. Applique ce programme avec quelques nombres de ton choix. b. Que remarques-tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ? c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.	PC 2. Choix sans conséquences • Choisir un nombre. • Ajouter 4. • Multiplier par 2. • Soustraire (retrancher) 8. a. Applique ce programme avec quelques nombres de ton choix. b. Quelle conjecture peut-on formuler ? c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.						
PC3. Écrire avec des lettres. Choisir un nombre. • Ajouter 4. • Multiplier par 2. • Soustraire (retrancher) 7 a. Quelle conjecture peut-on formuler ? b. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ. c. Prouver que la somme de deux entiers consécutifs est TOUJOURS impaire.	PC4. Vous avez dit « conjecture » Voici 3 programmes de calculs : <table><tr><th>Programme 1</th><th>Programme 2</th><th>Programme 3</th></tr><tr><td>Choisir un nombre Ajouter 4 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 5</td><td>Choisir un nombre Ajouter 2 Prendre le carré du résultat précédent Soustraire 9</td><td>Choisir un nombre Écrire son double puis ajouter 8 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 10</td></tr></table> a. Calcule les résultats des trois programmes pour la valeur 1 et -5 ? Qu'observe-t-on ? b. Quelle conjecture peut-on formuler ? c. Choisis un nombre au hasard et calcule les résultats des trois programmes pour cette valeur. Ou'observe-t-on ?	Programme 1	Programme 2	Programme 3	Choisir un nombre Ajouter 4 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 5	Choisir un nombre Ajouter 2 Prendre le carré du résultat précédent Soustraire 9	Choisir un nombre Écrire son double puis ajouter 8 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 10
Programme 1	Programme 2	Programme 3					
Choisir un nombre Ajouter 4 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 5	Choisir un nombre Ajouter 2 Prendre le carré du résultat précédent Soustraire 9	Choisir un nombre Écrire son double puis ajouter 8 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 10					

Tableau 1 – Récapitulatif des PC des séances 5 et 6

L'évaluation contient les deux problèmes suivants :

EvalPC.1. Vous avez dit « conjecture » Choisir un nombre entier positif • le Doubler • Ajouter 5 • Doubler ce résultat • Retirer le triple du nombre de départ • Retirer 10 • Écrire le résultat a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix b. Quelle conjecture peut-on formuler ? c. Prouver que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.	EvalPC.2. Vous avez dit « conjecture » • Choisir 3 entiers consécutifs (qui se suivent en ordre croissant) • Calculer leur somme a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix b. Quelle conjecture peut-on formuler ? c. Prouver que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.
---	--