

ANALYSE EN THEORIE DES SITUATIONS D'UNE SITUATION DE DISTRIBUTION A L'ECOLE MATERNELLE

Antoine Chenet et Patrick Gibel

Étudiant en Master MEEF Pratiques et Ingénieries de la Formation, parcours Innovations et didactiques, Université de Bordeaux et Laboratoire LAB-E3D, Université de Bordeaux

Résumé : Cet article rend compte d'une recherche réalisée dans le cadre d'un mémoire de Master¹² au cours de l'année universitaire 2023-2024. Il vise à mettre en évidence l'importance d'une situation fondamentale de la numération, mise en œuvre dans une classe de maternelle, permettant ainsi aux élèves de donner du sens au nombre et à ses usages, facilitant ainsi l'entrée dans le calcul. La méthodologie utilisée repose sur l'analyse des raisonnements des élèves du point de vue de leur fonction dans l'apprentissage et l'identification des registres sémiotiques convoqués.

Mots-clés : Distribution – énumération – registre sémiotique – raisonnement – situation fondamentale

Abstract : This paper reports on research carried out as part of a Master's thesis during the 2023-2024 academic year. It aims to highlight the importance of a fundamental numbering situation implemented in a kindergarten class, enabling pupils to give meaning to number and its uses, thus facilitating entry into calculation. The methodology used is based on the analysis of pupils' reasoning processes from its function point of view in learning and the semiotic registers called upon.

Key words: Distribution – enumeration - semiotic register - reasoning - fundamental situation

INTRODUCTION

Nous avons choisi de concevoir et mettre en œuvre une ingénierie didactique dont la situation centrale est une situation de distribution (Chenet, 2024) en nous appuyant, d'une part sur la théorie des situations didactiques de Brousseau (TSD), d'autre part sur une situation fondamentale des nombres entiers naturels proposée par Brousseau et Foucaud (1992). Dans ce cadre théorique, notre ingénierie intègre des situations d'action (Brousseau, 1998) ainsi que des situations de formulation (ibidem) donnant l'occasion à l'élève de communiquer ses procédures en explicitant ses actions. Ces situations sont porteuses d'informations (pour lui-même ou pour d'autres élèves) utiles à la réussite de la distribution, mais également porteuses d'informations utiles à l'observation des stratégies d'énumération.

Nous faisons l'hypothèse que la réussite du jeu proposé nécessite la mise en œuvre de nombreux raisonnements dans l'organisation des différentes suites actions et de leur contrôle. C'est pourquoi nous nous intéressons aux formes de raisonnements susceptibles d'apparaître lors de la dialectique action-formulation à l'œuvre dans les différents milieux de l'expérimentation. Pour ce faire, nous proposons dans cette étude un modèle d'analyse des raisonnements inspiré de celui de Bloch et Gibel (2011), Gibel (2018), s'appuyant sur la sémiotique de Duval (1995) afin d'identifier la nature des registres de représentation convoqués.

¹² Master MEEF mention Pratiques et Ingénieries de la Formation, parcours Innovations et Didactiques.

LE CADRE THÉORIQUE

La notion de situation fondamentale

CARACTÉRISATION D'UNE SITUATION FONDAMENTALE

La notion de situation fondamentale s'inscrit dans une réflexion d'ordre épistémologique qui interroge la raison d'être d'un savoir à enseigner, où il s'agit donc d'identifier « les conditions d'existence et de fonctionnement d'un savoir » (Bessot, 2011, p. 38).

La fonction d'une situation fondamentale est de résumer le sens global du savoir de façon à permettre ensuite de déployer le nombre et la diversité de ses occurrences suivant les nécessités et les possibilités de l'enseignement. Ce rôle est comparable à celui d'une connaissance générale par rapport aux connaissances particulières (Brousseau, 2005, p. 11). Il faut donc concevoir la situation fondamentale comme un « moyen de représenter les usages d'un savoir » (Perrin-Glorian & Bellemain, 2019, p. 12), en lien avec son histoire et le contexte social.

UNE SITUATION FONDAMENTALE DES NOMBRES NATURELS

La situation que nous avons souhaité faire vivre à des élèves de maternelle est une situation de distribution conçue dans le cadre de l'élaboration d'une ingénierie didactique. Elle s'inspire de la situation fondamentale des nombres naturels proposée par Brousseau et Foucaud (1992) à des enfants de 5-6 ans (Grande Section de maternelle – Cours Préparatoire). Ces auteurs présentent très clairement le potentiel de la situation de distribution qui permet à l'élève à la fois de décider seul de son action et de la contrôler, de recevoir le contrôle des autres, de débattre de la qualité de son résultat et de recommencer autant de fois que nécessaire.

Du point de vue de l'enseignant, cette situation permet « [...] d'organiser de très nombreux problèmes de difficultés progressives exigeant toujours l'utilisation des nombres et offrant aux enfants autant d'occasion d'en approfondir sa connaissance et d'en préciser sa prise de conscience » (Brousseau & Foucaud, 1992, p. 3). Il peut s'agir de distribuer à quelques élèves un ou plusieurs objets, ou de le faire à de nombreux élèves ; la présentation des objets à distribuer peut varier, par exemple groupés par 2, 3 ... jusqu'à 10.

Ce type de situations est d'une très grande richesse, en particulier en termes de compétences à mettre en œuvre et à développer, dont les capacités « à énumérer une suite plus ou moins longue de nombres d'objets », « à construire deux collections équipotentes », « à structurer une collection en différents groupements » et « à composer et décomposer les nombres par addition et multiplication » (*Ibid.*).

Dans ces situations de distribution où la règle du jeu est d'« apporter le nombre nécessaire et suffisant d'objets en une fois » (*Ibid.*), l'élève peut construire du sens aux nombres par la prise de conscience de leur(s) rôle(s) et de leur(s) usage(s). Au-delà de l'utilisation du nombre, c'est aussi la possibilité de construire le sens des premières opérations sur les nombres, celles de l'addition et de la multiplication (comme addition itérée) ou même de la division (distribuer des objets à un groupe d'élèves).

Enfin, nous terminerons cette présentation en évoquant un dernier aspect de la richesse de cette situation fondamentale, qui se loge dans les nombreux obstacles potentiels qu'elle recèle (comme de « pouvoir passer de l'unité au groupement et de considérer le groupement à la fois comme unité et comme groupement selon le cas » (Brousseau & Foucaud, 1992, p. 5)), c'est-à-dire une multitude d'occasions de les dépasser offerte aux élèves, autrement dit, de nombreuses opportunités de construire de nouveaux apprentissages.

Les registres sémiotiques associés aux entiers naturels mobilisés à la maternelle

Un objet se définit par l'objet en lui-même et par ses représentations. Ces représentations peuvent être multiples et elles peuvent appartenir à des systèmes différents. Ces systèmes sont régis par un ensemble de règles par lesquelles ont été créées les représentations. Parmi ces représentations, Duval (1993) définit les représentations sémiotiques :

Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentations qui a ses contraintes propres de signifiante et de fonctionnement, l'ensemble de ces signes est appelé le registre de représentation sémiotique (Duval, 1993, p. 39).

Pour comprendre l'objet, un individu doit donc le comprendre en lui-même mais également au travers de ses différentes représentations. L'activité cognitive correspondante consiste alors à faire des va-et-vient entre l'objet et ces dernières, mais aussi à faire des liens entre ses différentes représentations.

Dans le cas des mathématiques, l'objet en lui-même n'est pas présent (on ne peut ni le toucher, ni le voir par des instruments). Ce sont donc les représentations seules qui permettent d'y accéder. Dans le cas de l'objet mathématique « nombre », les différents registres de représentations sont :

- le *registre analogique* : le nombre est représenté sous forme de collections d'objets dessinés (par exemple : les constellations du dé, les doigts de la main ou des mains),
- le *registre symbolique* : il utilise les chiffres et les signes opératoires (les écritures chiffrées et les calculs)
- le *registre verbal ou langagier* : il emploie les mots nombres et les unités de numération, à l'oral ou à l'écrit.
- le *registre matériel structuré* : il résulte de la réalisation de groupements (ou de lots) d'objets matériels respectant des règles de groupements et élaboré conformément à un projet.

Le concept d'énumération

Pour mieux caractériser l'énumération, nous proposons de partir d'une définition de Briand : il s'agit d'« une connaissance nécessaire à [une] tâche d'inventaire » (Briand, 1999, p. 3) « au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule » (*Ibid.*, p. 17), c'est-à-dire « sans en oublier, sans en considérer un plusieurs fois » (Briand, 2017, p. 9). C'est pourquoi l'énumération intervient très souvent, dès qu'on a besoin de réaliser un inventaire : par exemple dans le cas d'une distribution (Brousseau & Foucaud, 1992) ou pour dresser les couverts (une assiette pour chaque convive, un couteau, une fourchette, ...). Il s'agit donc d'être capable de s'assurer de l'exhaustivité de ce « passage en revue » par un contrôle plus ou moins conscient. Briand en donne un exemple classique dans la vie courante, lorsque nous faisons des courses au supermarché d'après une liste établie à l'avance (Briand, Lacave Luciani, Harvouët, Bedere & Goua De Baix, 2000, p. 9). Dans ce cas banal, une difficulté réside pourtant dans le nécessaire contrôle des articles déjà ajoutés dans notre panier et les autres, ce qui peut être facilité par une structuration de la liste conformément à celle du magasin ou par catégorie d'articles.

Dans le cas particulier du comptage ou du dénombrement d'une collection finie d'objets, l'énumération est sollicitée quand il s'agit de mettre en correspondance terme à terme deux collections. Briand (1999) rappelle qu'il a déjà montré en 1993 que « pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité » (p. 15). Selon Dorier (2010), l'énumération est « ce qui est nécessaire pour organiser une collection dont on doit compter les éléments » (p. 4). On mesure donc à quel point cette connaissance est essentielle et que ne pas la maîtriser peut conduire à de nombreux échecs pour les élèves, dans de nombreuses activités non uniquement mathématiques.

PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

Notre questionnement vise à prendre en compte deux aspects essentiels lors de la mise en œuvre d'une situation de distribution : donner du sens au nombre et rendre l'énumération explicite et visible. Pour cela, nous avons alors choisi de prendre pour objet d'étude une situation de distribution, de par sa richesse de ce qu'elle sous-tend et de par son lien avec notre questionnement initial lié à une construction défailante du sens donné aux nombres dès le plus jeune âge. En effet, la distribution sollicite les aspects cardinal et ordinal des nombres et permet aux élèves de « prendre conscience [de leur] rôle, [de] ce à quoi ils servent et même de mettre en œuvre des opérations » (Brousseau & Foucaud, 1992, p. 3). Mais elle suppose surtout des capacités à énumérer des suites, des ensembles ou pour structurer des collections.

Ainsi, dans cet article, nous souhaitons apporter des éléments de réponse à la problématique suivante : est-il possible de concevoir et de mettre en œuvre une situation de distribution qui permette aux élèves de

maternelle, d'une part d'accéder au sens du nombre et de ses usages, d'autre part d'utiliser l'énumération comme condition nécessaire à sa réussite ?

MÉTHODOLOGIE GLOBALE : L'ÉLABORATION DE L'INGÉNIERIE

Présentation de la séquence

LES SUJETS DE L'ÉTUDE

Notre expérimentation a été menée à l'école maternelle Bouillerc (à Pau, France) qui présente la particularité d'accueillir de nombreux enfants issus de diverses populations allophones. La classe dans laquelle nous avons pu organiser notre expérimentation est une classe de 18 élèves (6 élèves de Petite Section, 7 élèves de Moyenne Section et 5 élèves de Grande section) âgés entre 3 et 5 ans. L'expérimentation a été réalisée en mars 2024 durant 4 séances essentiellement l'après-midi, moment où une grande partie des élèves (10) font encore la sieste. Partant, 8 élèves ont participé à la situation : 3 de Moyenne Section désignés par MS1, MS2, MS3 et 5 de Grande Section, GS1, GS2, GS3, GS4 et GS5. Selon l'enseignante titulaire, un enfant de Moyenne Section est plutôt « avancé » (désigné par MS3, participant souvent aux activités avec les plus grands), un enfant de Grande Section est en difficulté (désigné par GS1) et deux élèves de Grande Section sont considérés comme « avancés » (désignés par GS4 et GS5).

Nous pouvons considérer cette classe comme non ordinaire. En effet, l'enseignante a une solide expérience de l'enseignement en maternelle et possède le statut de maîtresse formatrice. Elle dispose de connaissances en TSD tant du point de vue théorique que pratique, est expérimentée dans la dévolution et le pilotage de situations adidactiques. En outre, les élèves de cette classe ont été confrontés depuis le début de l'année à de nombreuses situations adidactiques.

LES ENJEUX DIDACTIQUES DE LA SITUATION DE DISTRIBUTION ÉTUDIÉE

Pour concevoir notre ingénierie, il nous a semblé adéquat de nous placer dans le cadre de la TSD pour que les élèves, à travers la situation de distribution proposée, puissent donner du sens au nombre et puissent se rendre compte que l'énumération est le moyen de réussir en situation d'action.

L'enjeu doit être stimulant : la situation de distribution présente une complexité qui constitue dans le même temps sa grande richesse, offrant une multitude de possibilités notamment en regard de la nécessaire prise en compte des différences importantes entre les élèves de maternelle, qui plus est répartis sur trois niveaux. Il s'agit également de proposer une situation qui pose problème aux élèves et dont la résolution nécessite de mobiliser la connaissance visée. Mais à cet âge en particulier, il est essentiel que la solution se dessine au travers des actions des élèves et des rétroactions que le milieu leur renvoie.

Le potentiel adidactique de la situation offre en effet à l'élève une grande liberté pour penser, agir et prendre ses propres décisions. Néanmoins, le sujet est contraint par le milieu défini par les variables didactiques qui, dans cette situation, doivent l'amener à utiliser l'énumération pour dénombrer, mais pas seulement, comme nous pourrions le découvrir dans la suite de cet article.

Enfin, une place importante doit être accordée au langage en maternelle : les élèves vont être conduits à expliciter leurs actions au cours des moments de verbalisation orchestrés par l'enseignante et lors des situations de formulation (au sein du groupe) afin d'échanger et réfléchir avec les autres élèves et ainsi amener chaque élève à établir la connaissance visée.

Ainsi, le cadre théorique des situations didactiques nous apparaît particulièrement adapté pour, d'une part répondre aux exigences institutionnelles, d'autre part pouvoir étudier à la fois le rapport des élèves avec le milieu avec lequel ils interagissent, au travers les situations adidactiques d'action et de formulation, et les procédures et les raisonnements des élèves, dans la situation de distribution.

LA STRUCTURE DE LA SÉQUENCE

Notre ingénierie s'inspire de la situation fondamentale des nombres naturels de Brousseau et Foucaud (1992) et s'inscrit dans le cadre d'une illustration d'un chant prévu dans la programmation de l'enseignante. Il s'agit donc d'une situation à valeur sociale qui fait sens, avec un but clair et compréhensible pour les élèves. L'illustration proposée est constituée de différents éléments (l'illustration est constituée de 9 types d'éléments), chacun d'eux présents en quantités distinctes : 1 fond violet (apparaissant blanc ci-dessous, dénommé également « feuille support ») au format A4, 1 bocal, 1 poisson rouge, 1 bonnet rouge (lien avec le chant), 2 coraux rouges, 3 galets gris, 5 bulles jaunes, 4 algues vertes et 6 algues claires.



Fig. 1 : Modèle de l'illustration à réaliser

L'objectif, pour les huit élèves concernés, est de réussir à préparer et à distribuer l'ensemble des éléments nécessaires, en quantité adéquate, à tous les élèves de la classe afin qu'ils puissent ensuite réaliser leur propre illustration.

Ces huit élèves doivent prendre en compte le fait que tous les enfants ne sont pas présents dans la classe au moment de la réalisation de la distribution (certains élèves sont à la sieste, comme c'est le cas pour les plus jeunes) ou sont eux-mêmes en activité autrement dit hors de leur vue directe. Cette distribution est organisée en quatre séances (filmées). Chacune des quatre séances intègre : un processus de dévolution, une situation adidactique d'action, un moment de verbalisation des procédures, une situation adidactique de formulation et une situation d'institutionnalisation.

La première séance a pour finalité de permettre aux élèves de s'approprier le modèle, précisément les éléments qu'il contient, ainsi qu'une première prise de conscience du milieu objectif, puis dans un second temps suivent trois séances de difficulté croissante en lien avec le nombre d'éléments de chaque type à distribuer (un seul élément, puis entre deux et quatre éléments, enfin jusqu'à six éléments à distribuer à chaque élève) mais également du point de vue du nombre de tables à gérer (la table des élèves de Petite Section, celle des Moyenne Section et celle des Grande Section). Cette complexification correspond à l'introduction de sauts informationnels devant amener les élèves à développer de nouvelles stratégies basées sur l'énumération et la structuration des collections, le « simple » dénombrement devenant inaccessible pour les élèves de cet âge, même pour les plus avancés.

Au cours de cette première séance, les élèves doivent mettre en œuvre des stratégies qui leur sont propres pour récupérer le nombre exact d'éléments de chaque type conformément à ceux figurant sur le modèle, afin de pouvoir reproduire l'illustration (Fig. 1).

La seconde séance permet d'entrer dans la situation effective de distribution, en s'appropriant les règles du jeu. Cette situation propose des collections de tailles réduites et adaptées aux élèves de maternelle (autrement dit pour un type d'éléments donné, le nombre total d'éléments dont l'élève doit réaliser la distribution, est inférieur à 10) et ne concerne que les types d'éléments ne figurant qu'en un seul exemplaire (feuille support, bocal, poisson) sur le modèle, d'où notre choix de l'intituler « situation de distribution simple ».

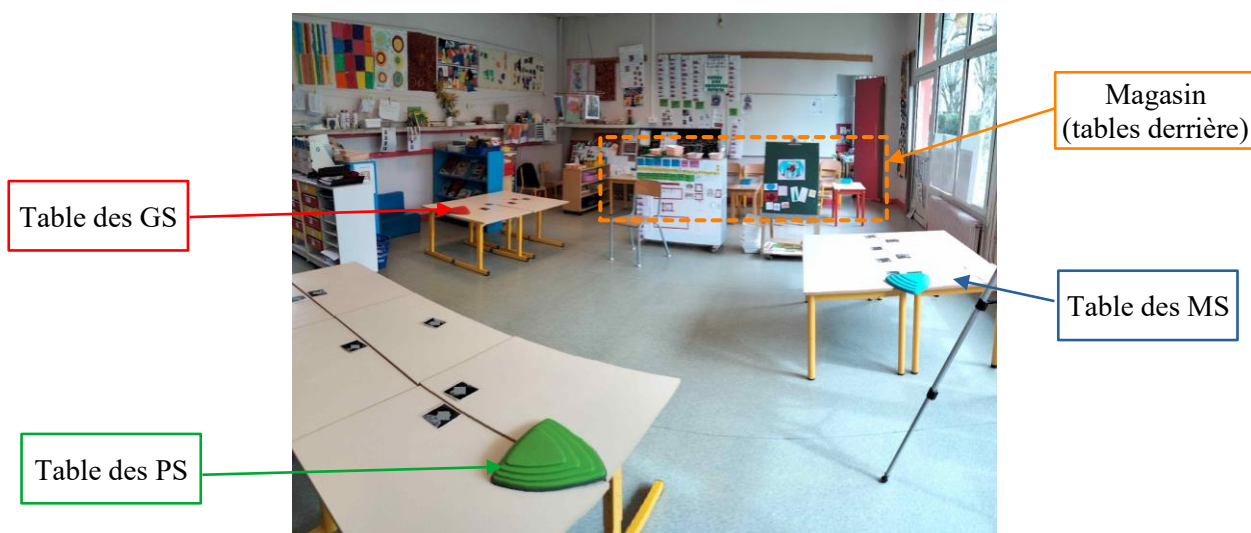


Fig. 2 : Organisation spatiale des tables des destinataires et du magasin



Fig. 3 : Les paniers du magasin (de gauche à droite : bulles, algues claires, coraux, bocaux, bonnets, feuilles support, galets, algues vertes, poissons)

Pour l'enseignante, la difficulté se situe dans la capacité à faire dévolution aux élèves de la situation de distribution elle-même. Pour ce faire, elle introduit sur le tableau un codage (représentation iconique) de chaque « mission » des élèves : chacune des trois tables est identifiée par une couleur (issu du choix des élèves dans la séance préparatrice) et l'élément à distribuer est représenté en un exemplaire¹³.

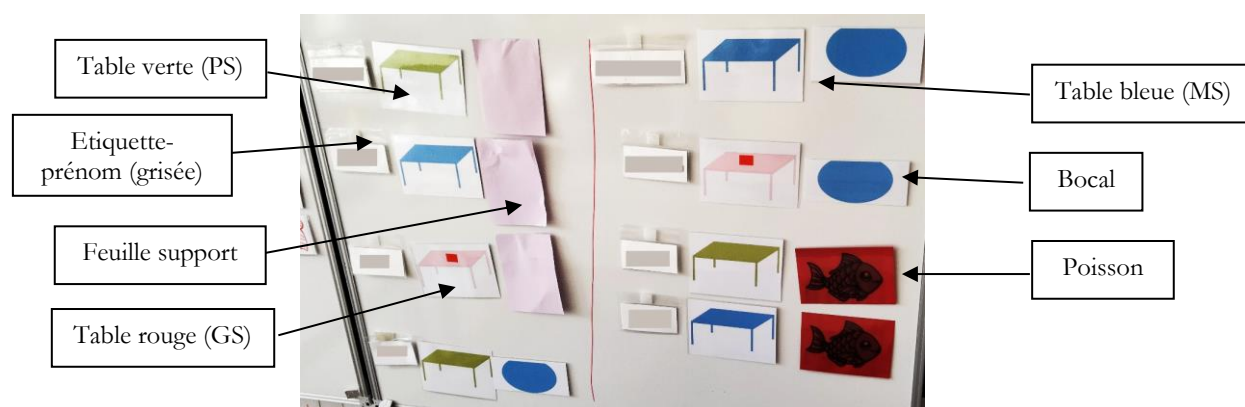


Fig. 4 : Dévolution de l'étape 2 – codage pour les missions de chaque élève (nom grisé)

¹³ Pour GS1, cela constituera un obstacle à la compréhension du codage : il considérera qu'il n'y a qu'un exemplaire à rapporter, soit pour toute la table, soit pour chaque élève (si l'élément est présent en plusieurs exemplaires sur le modèle).

À côté du prénom de chaque élève (grisé pour des raisons éthiques) figurent la table à gérer (verte, bleue ou rouge) et l'élément (bocal, poisson, feuille support) à récupérer au magasin puis à distribuer à l'ensemble des élèves de la table qui lui a été attribuée.

Pour identifier les élèves à chacune des tables (PS/MS/GS), les élèves ont également fait le choix de coller une photographie des élèves (représentation iconique, cf. Fig. 2).

À l'issue de cette seconde séance, nous supposons que les élèves ont normalement pu s'approprier les règles et les contraintes de la situation proposée, ainsi que le codage des missions mis en place, ce qui autorise l'introduction d'une nouvelle complexité (sauts informationnels). Les troisième et quatrième séances du jeu ne modifient pas le milieu, cependant les missions qui sont attribuées aux élèves diffèrent. Nous les avons nommées « situations de distribution complexes ». Dorénavant, il ne s'agit plus de distribuer un seul élément par élève, mais plusieurs ; de plus, certains des élèves doivent gérer plusieurs tables en même temps, toujours avec la contrainte de ne réaliser qu'un seul voyage pour réussir.

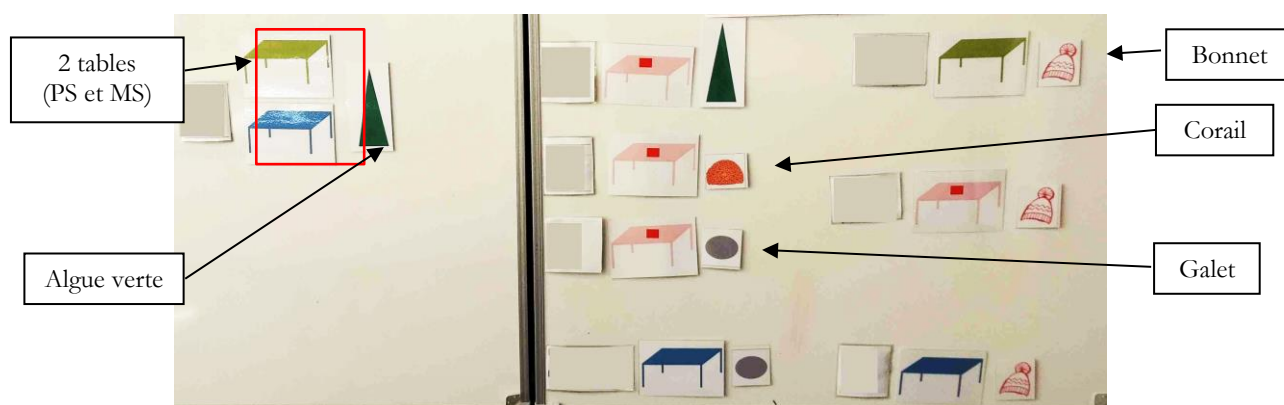


Fig. 5 : Exemples de codage de missions lors de la séance 3 – codage pour les missions de chaque élève dont deux tables à gérer pour une élève (à gauche) ; un seul élément à distribuer pour certains élèves (le bonnet, à droite)

Notons que l'attribution de ces missions prend en compte une différenciation en fonction des informations disponibles en amont sur les élèves, réajustée ensuite relativement aux réussites ou échecs des missions précédentes.

Analyse *a priori* de la situation de distribution « simple »

La stratégie idoine repose sur l'anticipation du résultat de la distribution ; elle se résume à savoir identifier les élèves (ou leur nombre) de la table dont l'élève est responsable, trouver un moyen d'en garder mémoire avant d'aller collecter au magasin juste ce qu'il faut d'éléments en une fois. La stratégie d'énumération s'appuie alors soit sur le pointage et la constitution d'une liste ordonnée des prénoms des élèves, avec ou sans construction d'une collection-témoin de doigts, soit sur le pointage et la mise en correspondance terme à terme des représentations des élèves avec une collection-témoin de doigts (avec ou sans comptage-numérotage), soit sur le pointage et le comptage-dénombrement, avec ou sans appui d'une collection-témoin de doigts.

Pour conserver la mémoire de la quantité et la « transporter » jusqu'au magasin, les élèves peuvent utiliser soit leur propre mémoire, soit la collection-témoin de doigts. Une fois au magasin, les élèves utilisent ces moyens de mémoire pour rappeler le résultat de l'énumération des élèves afin de constituer la collection des éléments d'illustration, avec les mêmes types de stratégies (restitution de la liste ordonnée des prénoms, mise en correspondance terme à terme des doigts de la collection-témoin avec des éléments du magasin, énumération des éléments au magasin par comptage-numérotage, avec ou sans appui de la collection-témoin de doigts, énumération d'éléments de la panier par comptage-dénombrement).

Analyse *a priori* des situations de distribution complexes

Ces nouvelles étapes du jeu introduisent des sauts informationnels à deux niveaux : le nombre d'éléments de chaque type n'est plus réduit à l'unité (valeurs prises entre 2 et 6) et le nombre de tables à gérer passe de une à deux (pour les élèves les plus avancés). Le dénombrement direct des collections d'éléments à distribuer n'est donc pas une stratégie accessible pour les élèves de cet âge. Les procédures doivent être distinguées selon trois moments : la *prise d'information*, la *collecte* et les *types de contrôles* qui se mettent en place.

Les élèves ont donc deux types d'informations à identifier : le nombre d'éléments du type d'élément du modèle d'une part, le nombre d'élèves concernés par la distribution (destinataires) d'autre part. Pour le premier, la présence du modèle au magasin soulage la mémorisation de l'information (accès direct). En revanche pour le second, la prise d'information doit nécessairement se faire avant de se rendre au magasin.

Quant aux stratégies de collecte, les considérations spatiales du partitionnement vont être primordiales dans les stratégies d'énumération. D'une part, le choix de l'espace pour réaliser cette partition revêt donc une importance capitale quant à la réussite ou l'échec de cette dernière (risque de mélange des éléments conduisant l'élève à devoir multiplier les contrôles). D'autre part, la partition des éléments « traités » (ou « à distribuer ») elle-même va devoir être organisée pour constituer la quantité *juste nécessaire*. C'est-à-dire que le geste de partitionnement ne peut se limiter à trier les éléments puisque l'élève doit pouvoir contrôler au fur et à mesure cette constitution (sa collecte) en vue de la distribution effective.

Pour ce faire, deux stratégies sont envisageables (n éléments à distribuer à p destinataires) qui passent par la constitution progressive de *lots* (ou paquets) d'éléments destinés à un destinataire donné (appariement) : soit n fois p destinataires ($n \times p$), soit p fois n éléments ($p \times n$). Ces lots apparaissent physiquement d'un point de vue spatial. Dans les deux cas, il y a deux sous-collections à gérer : celle des destinataires et celle des éléments à distribuer. Pour surmonter cette double contrainte, l'énumération s'avère comme la connaissance absolument incontournable pour réussir, fondement de notre ingénierie. Elle se manifeste donc à la fois par :

- l'utilisation de l'espace intermédiaire des tables du magasin pour réaliser le partitionnement matérialisant d'une part les destinataires (représentation iconique), d'autre part le nombre d'éléments de l'illustration attribués à chaque destinataire ;
- l'utilisation des doigts pour représenter soit les destinataires, soit les éléments de l'illustration ;
- le pointage successif des éléments (ou des lots d'éléments) qui permet de « clôturer » la liste des destinataires et le « paquet » d'éléments qui leur est destiné (par comptage ou dénombrement avec synchronisation de la récitation de la suite numérique).

Enfin, les contrôles nécessaires doivent être fréquents et nombreux, étant donnés la taille des collections en jeu ainsi que les deux types d'information à gérer. Concernant le contrôle du nombre d'élèves, pour une table, les stratégies sont les mêmes que pour la distribution « simple ». Pour deux tables, les stratégies se basent sur un dénombrement avec pointage ou utilisation des doigts comme collection-témoin.

MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS PRODUITS EN SITUATION DE DISTRIBUTION

Nous rappelons tout d'abord ici qu'en situation adidactique d'action, la connaissance visée doit être la stratégie optimale au problème posé au sujet, qui doit la mettre en œuvre comme moyen d'action sur le milieu.

Pour identifier les conditions théoriques sous lesquelles les différentes actions des élèves peuvent être considérées comme des raisonnements, nous avons choisi de nous appuyer sur le modèle multidimensionnel proposé par Bloch et Gibel (2011) et Gibel (2018). Nous avons alors construit plusieurs tableaux (*cf.* Annexe) pour lesquels, en regard de chaque fonction de raisonnement susceptible d'être

produite par l'élève en situation, nous avons identifié les registres de représentation pouvant être convoqués et qu'il est possible d'observer *en acte*, ainsi que les connaissances mises en œuvre, et ce lors des différentes mises en situation : situation d'action lors de la préparation de la collecte ou de la distribution effective et situation de formulation.

Par exemple, en situation de préparation de la collecte, un élève peut utiliser le registre analogique d'une collection-témoin de doigts pour déterminer le nombre de destinataires restant à gérer (fonction F2.2 dans le tableau proposé en Annexe¹⁴), en sollicitant l'énumération, synchronisée ou non avec la suite orale numérique. Ce faisant, il construit une première approche du calcul soustractif (2 élèves parmi 7 ont reçu l'élément dont ils sont destinataires, il peut se rendre compte qu'il en reste 5 à gérer) ce qui correspond à une actualisation de son répertoire didactique.

En second exemple, toujours lors de la préparation de la collecte, l'élève peut utiliser l'espace intermédiaire de la table du magasin pour réaliser sa collecte et en réalisant des lots (registre matériel structuré) pour contrôler cette dernière (fonction F5 du tableau), en s'appuyant sur l'énumération pour compter ou dénombrer (synchronisée ou non avec la suite orale numérique), soit au fur et à mesure de sa collecte, soit en fin de collecte. Il construit ainsi un autre usage de l'énumération, l'énumération pour contrôler, actualisant son répertoire didactique.

Nous avons ainsi identifié jusqu'à 16 fonctions de raisonnement, parfois décomposées en sous-fonctions (comme F1.1 ou F2.2 rattachées aux fonctions F1 et F2). L'analyse *a priori* permet de les positionner d'un point de vue théorique mais c'est l'analyse *a posteriori* et la confrontation avec la première qui nous fourniront l'information quant à la cohérence et l'efficacité de l'ingénierie que nous avons conçue.

PRÉSENTATION ET ANALYSE DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Tout d'abord, nous présentons l'organisation des différentes missions attribuées aux élèves :

ELEMENT	NB ELEMENTS	NUMERO MISSION	TABLE		
			PS (6)	MS (7)	GS (5)
Fond Violet	1	1	MS1	MS3	MS2
bocal	1	1	GS2	GS3	GS1
poisson	1	1	GS4	GS5	
bonnet	1	2	GS1	MS2	MS1
corail	2	2			MS3
galet	3	2		GS3	GS2
algue verte	4	2	GS4	GS4	GS5
poisson	1	3			MS2
corail	2	3	MS1	GS1	
galet	3	3	MS3		
Bulle	5	3	GS3	GS2	GS3
algue claire	6	3	GS5	GS5	GS4

Tableau 1 : Organisation des situations de distribution

Notons également que nous avons considéré comme adéquat que le modèle de l'illustration soit affiché et disponible au niveau du magasin tout au long des missions. En revanche, il était important également que depuis le magasin, les élèves ne puissent accéder directement (par la vue) aux représentations iconiques (photographies) de l'ensemble des élèves sur chaque table, en utilisant le mobilier de la classe pour « isoler » le magasin du reste de la classe (*cf. Fig. 2*).

Voici les résultats obtenus par les élèves au cours des quatre phases du jeu, au cours des séances qui ont été captées en notre présence (une séance supplémentaire a permis les réussites de tous) :

¹⁴ Nous avons fait le choix de présenter les usages du modèle en annexe afin d'explicitier chacune des fonctions.

	MS1		MS2		MS3		GS1		GS2		GS3		GS4		GS5	
	NOMBRE D'ESSAIS	REUSSITE	NOMBRE D'ESSAIS	REUSSITE	NOMBRE D'ESSAIS	REUSSITE	NOMBRE D'ESSAIS	REUSSITE	NOMBRE D'ESSAIS	REUSSITE	NOMBRE D'ESSAIS	REUSSITE	NOMBRE D'ESSAIS	REUSSITE	NOMBRE D'ESSAIS	REUSSITE
Situation 1	1	NON	1	NON	1	NON	1	NON	1	NON	1	OUI	1	OUI	1	OUI
MISSION #1	2	OUI	4	Aide d'un pair (MS1)	1	OUI	4	Aide d'un pair (MS1)	2	OUI	1	OUI	1	OUI	1	OUI
MISSION #2	2	OUI	2	OUI	2	OUI	3	OUI	5	NON	3	OUI	2	OUI	2	OUI
MISSION #3	2	NON	2	OUI	2	NON	2	Aide d'un pair (GS3)	Non effectuée		1	OUI	2	OUI	2	OUI

Tableau 2 : Résultats des missions dévolues aux élèves

Première séance (séance de reproduction de l'illustration modèle)

Ici, les élèves peuvent aller autant de fois qu'ils le souhaitent au magasin pour récupérer les éléments, en appui sur le modèle dont chacun possède une photocopie couleur sur leur table, non déplaçable. Le modèle est également disponible au niveau du magasin.

Le processus de dévolution est habilement mené par l'enseignante et permet *l'installation* de la situation adidactique, d'abord en réintroduisant le contexte de la situation (illustration d'un chant que les élèves reprennent tous ensemble en début de séance) selon un modèle dont les éléments le constituant, travaillés en amont, sont rappelés collectivement. L'enseignante procède alors à la passation des consignes de la situation et des critères de réussite les faisant reformuler, conformément à celles indiquées dans notre ingénierie *i.e.* en ne citant notamment pas le *nombre* comme solution à la situation proposée. Le milieu objectif installé, l'entrée dans la situation de référence permet à l'enseignante de tenir parfaitement ses rôles d'observateur et de régulateur, en intervenant de manière adéquate lors de la collecte et la réalisation (« Il te manque quelque chose ? Tu as le droit d'aller les chercher », « Tu t'organises comme tu veux », « Tu prends ce dont tu as besoin », « Vous prenez juste ce qu'il faut, pas plus, pas moins » ...).

À l'issue du jeu, l'enseignante procède avec les élèves à un moment de verbalisation pour analyser chaque production. Si toutes les productions ne sont pas complètes, cette première étape a atteint néanmoins ses enjeux, *i.e.* d'une part permettre aux élèves de découvrir l'organisation matérielle et spatiale, avec la nécessité de se déplacer pour collecter les éléments au magasin, ce qui est essentiel pour aborder les séances suivantes.

La situation de distribution « simple » (« Mission » 1)

L'enseignante introduit en début de séance le terme de *mission* (participant de l'enrôlement des élèves) et explicite les critères de réussites et la nouvelle contrainte (« Il faudra rapporter exactement juste ce qu'il faut, pas plus pas moins, et il ne faudra pas qu'il reste d'éléments... dans votre boîte, dans votre panier... parce que s'il reste des éléments dans votre panier, c'est que vous n'avez pas rapporté juste ce qu'il faut. Et il n'y aura qu'un seul voyage ») ; si vous n'avez pas réussi votre mission, vous aurez le droit de recommencer. Elle introduit également le codage de la mission de chacun. Le processus de dévolution conduit à la confrontation des élèves à la situation d'action.

Quant aux résultats, plusieurs essais (4) ont été nécessaires pour que tous les élèves réussissent. Là aussi, l'enseignante laisse l'opportunité à chacun de réussir, même si cela nécessite une multiplication des essais et du temps, laissant la liberté à chacun de prendre ses propres décisions.

Les situations de distribution « complexes » (« Missions » 2 et 3)

Ici, les élèves sont confrontés aux deux types de sauts informationnels liés d'une part à la multiplicité de certains éléments et d'autre part au nombre de tables à gérer, ce qui va ne concerner qu'une seule élève (GS4) dans la mission #2. L'enseignante présente les consignes du jeu (identiques au jeu précédent), mais également celle du rappel essentiel pour faire dévolution aux élèves de la situation de la procédure qui avait permis de réussir : il faut *compter* les enfants et les éléments. Nous constatons de nouveau la qualité des gestes professionnels de l'enseignante dans la mise en œuvre du processus de dévolution, rien n'est laissé au hasard, oublié ou négligé. Les consignes du jeu sont données, répétées, et la possibilité de pouvoir recommencer si l'élève n'y arrive pas du premier coup est reformulée par les élèves. En situation adidactique d'action, le processus de dévolution se poursuit avec la même efficacité que lors des premières

étapes du jeu. En particulier, elle effectue un simple rappel à la possibilité d'utiliser la table comme espace *intermédiaire* pour éviter un risque réel d'abandon de GS4. Lors de son second essai (mission #2), GS4 s'investit de manière magnifique pendant près de 10 minutes (voir l'analyse plus loin dans l'article).

À l'issue de chaque essai, l'enseignante prend le temps de faire valider ou invalider le résultat de chaque enfant du groupe par l'ensemble des élèves, de faire verbaliser les procédures permettant ainsi le bon fonctionnement de la situation d'apprentissage. La dévolution de la situation adidactique de formulation, visant à permettre aux élèves de formuler de façon autonome les conditions qu'il est nécessaire de réunir afin de réussir leur mission, permet de mettre en évidence, aux yeux de tous, la nécessité de réaliser des lots d'éléments pour réussir.

En conclusion, à l'issue du jeu, nous pouvons considérer que l'enseignante a pleinement réussi la dévolution de la situation de distribution au sens de Brousseau et Foucaud, permettant aux enfants de contrôler et décider de leurs actions, de recevoir le contrôle des autres, débattre avec eux de la validité de son résultat, recommencer autant de fois qu'il le faut. Elle met en œuvre le processus de dévolution avec précision, fait vivre aux élèves les situations adidactiques, leur offrant la possibilité de réaliser différents essais lors de la confrontation au milieu objectif, les amenant à verbaliser le résultat de leurs actions et ensuite à communiquer au sein du groupe les procédures mises en œuvre. Elle institutionnalise aux moments opportuns les réalisations de certaines procédures, les usages du nombre et de l'énumération via le comptage (avec pointage). De plus, le répertoire didactique des élèves s'est enrichi de nombreuses autres connaissances, comme le montre l'analyse des raisonnements proposée dans la section suivante.

L'analyse des procédures et des formes de raisonnements

Afin de comprendre comment nous utilisons notre modèle, voici l'analyse d'une situation d'action, correspondant à la mission #2 (*cf. Fig. 6*) de l'élève GS4 (distribution « complexe », collecte de 4 algues vertes pour les 6 élèves de Petite Section et pour les 7 élèves de Moyenne Section). C'est une situation riche et complexe qui dure près de 10 minutes. L'élève GS4 s'occupe d'abord de réaliser la collecte des algues pour la table des 7 élèves de Moyenne Section.

Dans un premier temps, GS4 réalise sa collecte en énumérant 4 algues vertes qu'elle prend dans la panière du magasin et dépose dans son panier, une par une. Elle *récite la comptine numérique de manière synchrone avec son geste*, réalisant un premier lot (de 4 algues vertes) qu'elle rassemble et place sur un côté de son panier. La procédure d'énumération consiste ici en la réalisation d'une *partition entre les éléments non traités* (dans la panière du magasin) et *traités* (dans son panier), en appui sur le registre matériel structuré de l'espace intermédiaire de son panier de transport et du lot de 4 algues vertes. GS4 lève alors l'un après l'autre les 5 doigts de sa main droite et 2 de sa main gauche (7 levés au total), puis baisse le pouce droit, convoquant ainsi le registre analogique de la collection-témoin des doigts. Il lui reste donc 6 doigts levés qu'elle énumère par pointage avec l'index gauche pour les 4 doigts de la main droite, puis en baissant puis relevant l'un après l'autre les 2 doigts pour la main gauche.

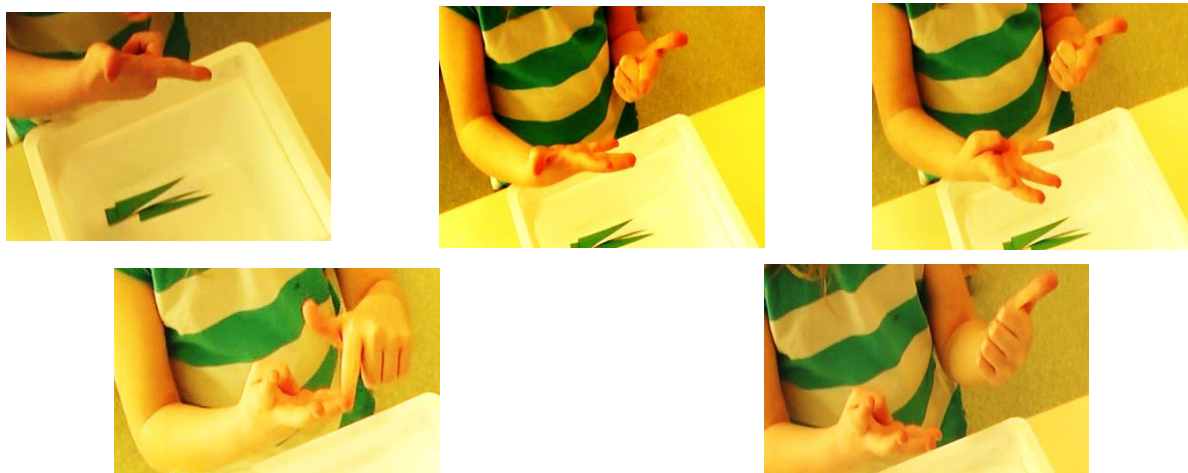


Fig. 6 : Collecte d'un premier lot de 4 algues vertes dans le panier

GS4 recommence alors la même procédure d'énumération pour une seconde série de 4 algues vertes, sans faire le lot dans le panier ; à l'issue, elle lève de nouveau 7 doigts, puis en baisse cette fois 2 (pouce et index droits). Elle énumère ces 5 doigts sans les pointer mais en les baissant puis en les relevant l'un après l'autre. Elle reproduit ce schéma, ajoutant dans le panier une troisième série de 4 algues. GS4 est confrontée à un souci lors de la collecte de la 4^e série : elle ajoute 2 algues mais, peut-être perdue dans son énumération, essaye de récupérer ces 2 algues probablement pour la reprendre ; cependant, étant donné le mélange des algues dans le panier, elle vide tout son panier et recommence depuis le début. Elle utilise la même procédure mais organise cette fois-ci des lots dans son panier, uniquement pour les 5 premières séries. Elle se rend compte qu'il reste 2 séries à collecter qu'elle enchaîne rapidement, sans passer par l'étape des doigts avant la dernière série, par *énumération avec récitation de la suite numérique* (1 à 4, deux fois) *synchronisée avec le geste*.

Elle s'appuie probablement aussi sur un *subitizing*. Au final, ces algues sont mélangées au centre du panier (GS4 ne les rassemble pas sous forme de lots de 4 algues).

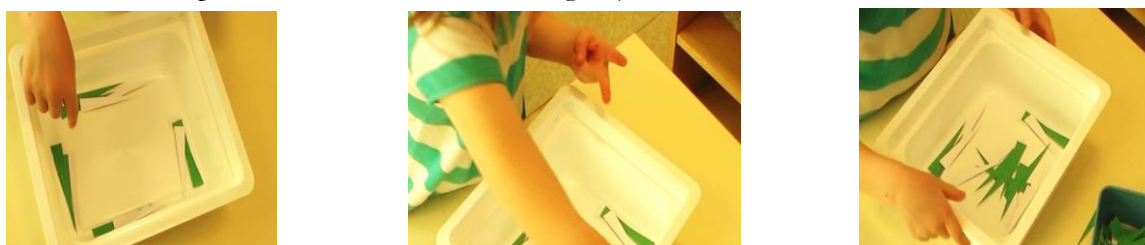


Fig. 7 : Collecte des 7 séries de 4 algues vertes – 4 lots réalisés et 2 séries mélangées au centre

Une fois cette première partie de la collecte *a priori* terminée, GS4 semble avoir oublié l'information quant au nombre de destinataires de la seconde table (celle des élèves de PS) : elle se déplace légèrement sur sa droite d'où elle peut voir (depuis le magasin) cette dernière à distance et énumère en pointant à distance probablement ces destinataires. GS4 va énumérer trois nouvelles séries de 4 algues, s'appuyant sur la récitation de la comptine numérique et sur l'énumération à distance des destinataires. Cependant, les algues sont ajoutées dans le panier sans faire de groupement, elles sont donc mélangées au centre du panier. GS4 décide de faire des lots, mais la manipulation dans ce petit panier n'étant pas aisée (c'est une contrainte du milieu pensée dans ce but), les algues continuent à se mélanger et défaire les lots déjà organisés.

Un peu perdue, c'est le rappel par l'enseignante de la possibilité d'utiliser la table (devant les paniers du magasin) qui va l'aider. À partir de ce moment, cela se passe très vite : GS4 laisse 6 lots dans son panier, sort les autres algues qu'elle dépose sur la table, organise un lot supplémentaire qu'elle ajoute au panier (*i.e.* 7 lots pour les élèves de MS). Ensuite, convoquant le *registre matériel structuré* de l'espace intermédiaire de la

table et les lots, elle organise la collecte pour les 6 élèves de PS, en énumérant les 4 algues pour chaque lot : trois premiers lots en utilisant les algues présentes sur la table (*partition entre les éléments non traités et traités* par déplacement des algues une par une sur la table), les trois suivants en prenant les algues vertes une par une dans la pаниère et les déposant sur la table (*partition entre les éléments non traités* (dans la pаниère) et *traités* (sur la table)).

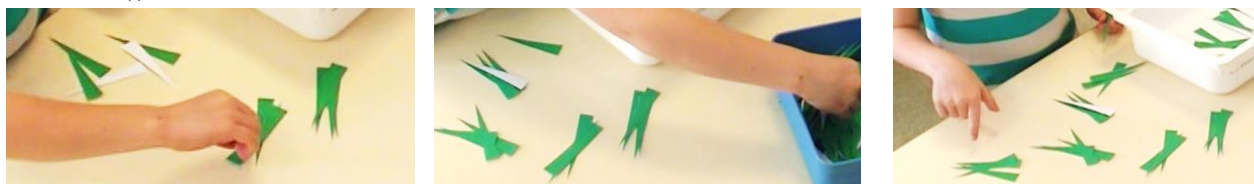


Fig. 8 : Collecte des 6 séries de 4 algues vertes destinées aux PS en utilisant l'espace intermédiaire de la table.

L'analyse des différentes formes de raisonnement montre une richesse de ces dernières, mobilisées plusieurs fois dans des buts différents :

- GS4 convoque efficacement le registre de représentation du codage de la mission, partant, la forme de raisonnement *F3* (« *Représentation et compréhension de la mission* ») : cela dénote sa capacité à s'approprier de nouvelles connaissances liées aux constructions symboliques ;
- GS4 sait mobiliser la fonction *F8* de *Structuration de collections* convoquant le registre idoine de représentation (les lots) qui montre qu'elle a bien construit la connaissance d'*énumération pour réaliser des lots d'éléments* ; de plus, elle organise sa collecte par une partition en deux sous-collections des destinataires des tables à gérer, en appui sur le matériel structuré des espaces intermédiaires du panier et de la table. Ce faisant, GS4 découpe sa mission en deux sous-tâches, ce qui relève une capacité cognitive très intéressante en termes de raisonnements : elle a trouvé une procédure autre adaptée au champ numérique attendu de maternelle (*i.e.* jusqu'à 10) ;
- les deux formes de raisonnement les plus ostensibles sont celles liées à la *détermination du nombre de destinataires restant à gérer* (fonction *F2.2*) et la *conservation de la mémoire de ces destinataires restant à gérer* (fonction *F6*) fonctionnant de concert dans la stratégie que GS4 met en place en convoquant de nombreux registres : d'une part le *registre matériel structuré* faits de 6 lots et 7 lots de quatre algues vertes et les espaces intermédiaires du panier et de la table pour réaliser le partitionnement de ces lots ; d'autre part le registre analogique de la collection-témoin de doigts.
- bloquée dans son organisation de lots rendue impossible par le mauvais choix du matériel du panier (espace restreint à l'intérieur de la pаниère et nombre trop élevé d'algues), provoquant mélanges, GS4 ne *reconsidère pas et ne modifie pas d'elle-même les conditions de réalisation* de sa préparation de sa collecte, c'est-à-dire qu'elle ne sollicite pas la fonction *F4*, d'où le risque d'abandon observé par l'enseignante ; c'est grâce au rappel de cette dernière qu'elle le fera, en convoquant alors un autre registre matériel structuré : l'espace intermédiaire de la table ;
- bien qu'ayant *a priori* relevé l'information quant au nombre de destinataires de la table des Moyenne Section (via la fonction *F1.2*), GS4 ne procède pas à la représentation des destinataires par la collection-témoin de doigts mais *reconsidère et modifie les conditions de réalisation* de sa collecte en convoquant le registre iconique des photographies des élèves ; GS4 change donc de procédure et utilise une énumération « à distance » des élèves de MS restant à traiter.

CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons cherché à savoir s'il était possible de concevoir et de mettre en œuvre une situation de distribution qui permette aux élèves de maternelle d'une part d'accéder au sens du nombre et de ses usages, d'autre part d'utiliser l'énumération comme condition nécessaire à sa réussite. En nous appuyant sur la théorie des situations didactiques, nous avons pour ce faire conçu une ingénierie didactique que nous avons mise en œuvre dans une classe-cycle de maternelle et pour laquelle nous avons mené une analyse didactique précise. À travers celle-ci, nous avons cherché d'une part à déterminer si la situation de distribution pouvait offrir un intérêt et une richesse du point de vue des raisonnements susceptibles d'apparaître, au travers l'observation des différents registres sémiotiques convoqués, d'autre part à identifier le rôle joué par l'énumération dans la mise en œuvre des procédures produites en vue d'assurer les fonctions de ces raisonnements.

L'analyse *a posteriori* montre que la méthodologie choisie permet de répondre à notre problématique et apporte des éléments concrets à nos questionnements. Les situations de distribution ont été élaborées afin d'être potentiellement adidactiques, nous avons montré qu'elles le sont réellement car, en premier lieu, elles permettent la mise en œuvre de nombreuses connaissances et l'enrichissement du répertoire didactique par de nombreux nouveaux savoirs. En second lieu, elles font de l'énumération la connaissance essentielle et nécessaire à leur réussite. Mais au-delà de cela, elles demandent que les élèves mettent en place des procédures qui sollicitent des raisonnements conduisant à devoir imaginer des actions et des suites d'actions, à mettre en place de nombreux contrôles où l'énumération a un rôle déterminant. Ainsi, les élèves, pour réussir, sont amenés à prendre conscience par eux-mêmes de cette nécessaire construction de raisonnements mathématiques où l'usage du nombre prend du sens, à prendre conscience du rôle et de l'importance de l'énumération grâce à un milieu pensé pour les y autoriser, leur permettant de s'y confronter à de nombreuses reprises et d'adapter leurs procédures au travers des rétroactions constructives, au sein de situations riches.

Par ailleurs, nous souhaitons revenir sur deux enjeux importants de notre ingénierie. Le premier concerne d'abord pour les élèves d'être capables de fabriquer des collections équipotentes en ayant recours à l'énumération. Nous l'avons mis en évidence au travers l'analyse des situations de distribution simples et complexes, mais cette démarche concernant la réflexion sur comment parvenir à le réaliser commence dès la première situation d'appropriation du modèle (« Situation 1 »). Il est probable que sans cette première étape, nous n'aurions pu obtenir une telle richesse au niveau des procédures, ce qui donne tout son sens à cette situation. De plus, elle participe d'un second enjeu correspondant à la construction de premières représentations mentales concernant le calcul. En effet, au-delà de la « simple » équipotence, les situations de distributions « complexes » doivent amener les élèves à fabriquer des collections telles qu'à un élément doit correspondre un ensemble d'éléments, un « lot », et ce pour n destinataires. Avec la gestion de deux tables apparaissent les structures additives ($13 = 6 + 7$) et la décomposition additive du calcul multiplicatif ($13 \times 6 = (7 \times 6) + (6 \times 6)$). Nous sommes là dans une première approche du sens de l'addition et de la multiplication. Nous l'avons vu correctement à l'œuvre dans la contingence, avec l'élève GS4, mais c'est le cas aussi avec GS5, GS3 et même MS3 (Chenet, 2024).

Lors de la répartition, il s'agit également d'effectuer un partage des éléments collectés entre les différents destinataires : se construisent alors le sens de la division et celui de la soustraction. Ce second enjeu est donc bien celui de la construction du sens des opérations, mais cela va encore au-delà.

Quant à notre modèle d'analyse des raisonnements, tel qu'il est utilisé, accordant une place centrale aux divers registres sémiotiques à la fois en situation d'action et en situation de formulation, montre de manière claire que ces situations de distribution sollicitent les nombreuses fonctions du raisonnement (comme la détermination du nombre d'éléments à collecter et celle du nombre de destinataires, la représentation et la compréhension de la mission, le contrôle, la conservation en mémoire des destinataires restant à gérer, la réalisation de la répartition, la construction de représentations mentales du calcul, la reconsidération des conditions de réalisation...), tant lors de la collecte des éléments à distribuer que lors de la distribution effective, expliquant la richesse de notre ingénierie.

Brousseau avait identifié trois points essentiels sur lesquels devait porter une situation fondamentale : « les connaissances en jeu, l'activité et les méthodes utilisées, les motivations des actants. » (Brousseau, 2005, p. 11). Nous pensons avoir démontré que notre ingénierie didactique satisfait aux deux premiers points ; quant au troisième, l'investissement entier des élèves dans le jeu proposé tout le long de l'expérimentation l'atteste également sans doute possible.

Ainsi, nous avons l'ambition de construire une situation *fondamentale* visant à mettre en œuvre l'énumération comme moyen de réussite. Nous appuyant sur la citation déjà donnée de Perrin-Glorian & Bellemain (2019) définissant la situation fondamentale comme un « moyen de représenter les usages d'un savoir » (p. 12), nous considérons donc que la situation de distribution que nous avons conçue est la situation fondamentale des nombres et de leur usage (en termes de calcul), mais c'est aussi un moyen de comprendre l'intérêt et le sens du savoir d'énumération.

BIBLIOGRAPHIE

- Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations didactique. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Flückiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak, (dir.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 29-58). La pensée sauvage. <https://hal.science/hal-05070901/>
- Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques. Étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228. <https://hal.science/hal-02525901/>
- Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41. <https://shs.hal.science/halshs-00494924/>
- Briand, J. (2017). Outillage pour organiser la construction des premiers nombres à l'école maternelle. Document non publié. <http://ddm.joel.briand.free.fr/publi2/albi2.pdf>
- Briand, J., Lacave Luciani, M. J., Harvouët, M., Bedere, D., & Goua De Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N*, 66, 7-22. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-66-grand-n/1-enseigner-l-enumeration-en-moyenne-section--488278.kjsp?RH=1550476512936>
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques : Didactiques des mathématiques 1970-1990. La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2005). Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. Dans *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 165-194). La pensée sauvage.
- Brousseau, G., & Foucaud, R. (1992). *Situations didactiques pour l'apprentissage des nombres naturels*. IREM de Bordeaux. <https://hal.science/hal-00515111/>
- Chenet, A. (2024). Etude en théorie des situations didactiques du rôle et des fonctions de l'énumération en situations de distribution à l'école maternelle. [Mémoire, Université de Bordeaux]. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-05070652v1>
- Dorier, J.-L. (2010). L'analyse a priori : Un outil pour la formation d'enseignants—exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire. L'enseignement des mathématiques à l'école : Où est le problème — Dans XXXVI^e COLLOQUE COPIRELEM, Auch. <https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO10014.pdf>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, (37-65). https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf
- Duval, R. (1995). Sémosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang.
- Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques* (Habilitation à diriger les recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour). <https://hal.science/tel-01919188/document>

Perrin-Glorian, M.-J., & Bellemain, P. M. B. (2019). L'ingénierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maîtres. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 9(1), 45-82. <https://hal.science/hal-03523253/>

ANNEXE : LE MODÈLE D'ANALYSE DES FONCTIONS DU RAISONNEMENT

	Fonctions du raisonnement		Niveau d'utilisation du répertoire	Registres convoqués	Niveau d'actualisation du répertoire
Préparation	Prise d'information (actions) (F1)	Déterminer le nombre d'éléments à collecter (F1.1)	- Subitizing - Énumération pour compter ou dénombrer - Utilisation de la suite numérique - Synchronisation de la suite orale numérique avec pointage - Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Réaliser des collections équipotentes	Registre analogique/iconique : dessin, collection-témoin de doigts	- Énumération pour compter ou dénombrer - Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Réaliser des collections équipotentes - Énumération pour réaliser un lot d'éléments identiques
		Déterminer le nombre de destinataires (F1.2)	- Énumération des prénoms (liste ordonnée) - Énumération pour compter ou dénombrer - Utilisation de la suite numérique - Synchronisation de la suite orale numérique avec pointage - Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Surcomptage	Registre analogique/iconique : photographies/étiquettes-prénoms, collection-témoin de doigts	- Énumération pour compter ou dénombrer - Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Réaliser des collections équipotentes
	Prise d'information (organiser la suite d'actions) (F2)	Déterminer le nombre d'éléments restant à collecter (F2.1)	- Énumération pour compter ou dénombrer - Utilisation de la suite numérique - Synchronisation de la suite orale numérique avec pointage - Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement	Registre analogique/iconique : dessin, collection-témoin de doigts Registre matériel structuré : partition, lots, constellation	- Énumération pour réaliser des lots d'éléments - Première approche du calcul soustractif
		Déterminer le nombre de destinataires restant à gérer (F2.2)	- Énumération des prénoms (liste ordonnée) - Énumération pour compter ou dénombrer - Utilisation de la suite numérique - Synchronisation de la suite orale numérique avec pointage - Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Réaliser une partition	Registre analogique : Collection-témoin de doigts Registre matériel structuré : espace intermédiaire, partition, lots, constellation	- Énumération pour réaliser des lots d'éléments comme représentants les destinataires - Première approche du calcul soustractif
	Représentation et compréhension de la mission (F3)			Registre analogique/iconique : codage des éléments de la mission	- Constructions symboliques
	Reconsidération et modification des conditions de réalisation (F4)			Registre analogique/iconique : photographies/étiquettes-prénoms, collection-témoin de doigts Registre matériel structuré : partition, lots, constellation, espace intermédiaire	- Énumération pour organiser
	Contrôle (F5)		- Énumération pour compter ou dénombrer (avec ou sans pointage) - Utilisation de la suite numérique - Synchronisation de la suite orale numérique avec le geste	Registre analogique : collection-témoin de doigts, photographies/étiquettes-prénoms Registre matériel structuré : partition, lots, constellation, espace intermédiaire	- Énumération pour contrôler
	Conservation de la mémoire des destinataires restant à gérer (F6)		- Énumération des prénoms (liste ordonnée) - Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Énumération pour dénombrer	Registre analogique/iconique : collection-témoin de doigts	- Énumération pour mémoriser

Tableau 3 : Modèle d'analyse des fonctions du raisonnement – Préparation de la collecte (1)

	Fonctions du raisonnement	Niveau d'utilisation du répertoire	Registres convoqués	Niveau d'actualisation du répertoire
Préparation	Anticiper le résultat d'une action (F7)	- Réaliser des collections équipotentes	Registre analogique/iconique : collection-témoin de doigts Registre matériel structuré : partition, espace intermédiaire	- Anticipation par le calcul
	Structuration de collections (partition et groupement) (F8)	- Réaliser une partition - Réaliser des groupements - Structurer des espaces	Registre analogique : collection-témoin de doigts Registre matériel structuré : partition, lots, espace intermédiaire	- Énumération pour réaliser des lots d'éléments
	Construction de représentations mentales du calcul (composition/décomposition par addition et multiplication) (F9)	- Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Énumération pour dénombrer - Surcomptage - Structurer des espaces - Réaliser une partition	Registre analogique/iconique : collection-témoin de doigts, photographies/étiquettes-prénoms Registre matériel structuré : Partition, lots, constellation, espace intermédiaire Registre langagier	- Anticipation par le calcul - Approche du calcul par décomposition/recomposition - Première approche du calcul multiplicatif

Tableau 3 : Modèle d'analyse des fonctions du raisonnement – Préparation de la collecte (2)

	Fonctions du raisonnement	Niveau d'utilisation du répertoire	Registres convoqués	Niveau d'actualisation du répertoire
Répartition	Structuration de collections (partition et groupement) (F10)	- Réaliser une partition - Réaliser des groupements	Registre analogique : Collection-témoin de doigts Registre matériel structuré : espace intermédiaire, lots, constellation	- Énumération pour réaliser des lots d'éléments
	Réaliser la répartition / Faire la distribution (F11)	- Énumération des pré-noms (liste ordonnée) - Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Énumération pour compter ou dénombrer - Utilisation de la suite numérique - Synchronisation de la suite orale numérique avec le geste - Réaliser des collections équipotentes	Registre iconique: photographies/étiquettes-prénoms, dessin Registre matériel structuré : constellation, lots Registre langagier	- Énumération pour réaliser des lots d'éléments comme représentants les destinataires - Première approche de la soustraction et du partage
	Contrôle (F12)	- Énumération pour compter ou dénombrer (avec ou sans pointage) - Utilisation de la suite numérique - Synchronisation de la suite orale numérique avec le geste	Registre analogique/iconique : photographies/étiquettes-prénoms, collection-témoin de doigts, dessin Registre matériel structuré : Partition, lots, constellation	- Énumération pour contrôler
	Reconsidération et modification des conditions de réalisation (F13)		Registre analogique/iconique : photographies/étiquettes-prénoms, collection-témoin de doigts Registre matériel structuré : Partition, lots, constellation, modèle	- Énumération pour organiser
	Construction de représentations mentales du calcul (composition/décomposition par addition et multiplication) (F14)	- Comptage-numérotage - Comptage-dénombrement - Énumération pour compter ou dénombrer - Surcomptage	Registre analogique/iconique : photographies/étiquettes-prénoms, collection-témoin de doigts Registre matériel structuré : Lots, constellation Registre langagier	- Anticipation par le calcul - Première approche du calcul multiplicatif

Tableau 4 : Modèle d'analyse des fonctions du raisonnement – Distribution effective

	Fonctions du raisonnement	Niveau d'utilisation du répertoire	Registres convoqués	Niveau d'actualisation du répertoire
Formulation	- Revenir sur sa stratégie, ses choix	<i>Préparation</i>	Registre langagier	- Énumération pour organiser - Usage du nombre (mémoire, calcul)
	- Identification des conditions d'utilisation (valide/invalide) (F15)	<i>Répartition</i>		
Institutionnalisation	- Explications, justifications visant à définir l'énumération comme connaissance d'organisation/structuration - Identification de l'énumération comme moyen de réussite de la distribution (F16)	<i>Ici sont mobilisables potentiellement toutes les connaissances indiquées pour les fonctions F1, F2, F5, F6, F7, F8, F9</i> <i>Ici sont mobilisables potentiellement toutes les connaissances indiquées pour les fonctions F10, F11, F12, F14</i>	Registre langagier Registre analogique/iconique : dessins, codage des éléments de la mission Registre matériel structuré : lots, constellation	- Énumération pour organiser/structurer/réussir la distribution - Construction explicite du calcul (composition/décomposition par addition et multiplication) - Sens et usage du nombre pour anticiper la distribution effective

Tableau 5 : Modèle d'analyse des fonctions du raisonnement – Formulation et Institutionnalisation