227

RMé

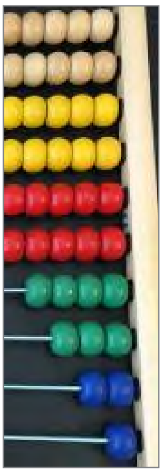
REVUE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE

JUIN 2017

ISSN 2571-516X

RMé 227

SOMMAIRE



5 Un boulier en classe de mathématiques : oui, mais lequel ?
Céline Vendeira

13 Une didactique des mathématiques pour travailler le calcul professionnel
Nadine Kipfer, Ursula Scharnhorst

20 Résolution des inéquations : une situation-problème étonnante pour remédier aux erreurs
Salek Ouailal, Naceur Achtaich

29 Interagir avec Del pour découvrir un peu de ce qu'elle sait et... aller de l'avant
Jean-Michel Favre

37 Petite séquence sur le Labo-maths - Expérience octogonale avec GeoGebra
Jimmy Serment

44 Comparaison de l'enseignement de la géométrie en contextes d'enseignement obligatoire spécialisé et de formation professionnelle : étude de cas de trois structures
Michaela Chlostova

RMé
REVUE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE

Vous lisez désormais la **Revue de Mathématiques pour l'école.**

Ainsi votre revue Math-Ecole change-t-elle de nom pour ce nouveau numéro, 227ème de son histoire. Nous sommes bien conscients que c'est une surprise pour vous, amies lectrices et amis lecteurs, mais sachez que pour nous, comité éditorial, c'était une obligation. Voici en quelques mots la raison de ce changement. Nous avons appris dans un courrier récent que « Math-Ecole » était désormais une marque déposée à l'Institut Fédéral de la Propriété Intellectuelle suisse (depuis décembre 2016). De ce fait, il nous est formellement interdit de l'utiliser par son propriétaire. Nous avons dû effectuer un certain nombre de changements dans un délai imposé très court, raison pour laquelle ce numéro 227 sort avec un peu de retard, ce dont nous vous prions de nous excuser. Tous les anciens numéros de la revue gardent cependant leurs titres respectifs : Les nombres en couleurs puis Math-Ecole bien entendu.

Devenue **RMé**, la Revue de Mathématiques pour l'école continuera à poursuivre ses objectifs de diffusion sans changement de sa ligne éditoriale. La même volonté de publier des outils pour l'enseignement des mathématiques nous anime, le même enthousiasme à découvrir la richesse de vos propositions de contribution nous régénère, le même engouement à vous faire partager tout cela reste notre souhait. Soyez en certaines, soyez en certains !

Nous avons profité de cette occasion inattendue pour donner à la revue un nouveau look, un nouveau logo, une nouvelle adresse et un nouveau site. Elle est belle comme un sou neuf ! Vous pouvez nous faire part de vos remarques sur ces évolutions en utilisant la rubrique contact du site, nous vous remercions par avance. L'adresse du site est désormais : http://www.revue-mathematiques.ch/

Selon nos souhaits de diversification des types d'écrits, ce numéro 227 de la revue RMé vous propose quatre articles scientifiques, un compte-rendu d'expérience en classe spécialisée et une narration d'enseignant. Le premier de ces textes concerne un outil de calcul fort connu des enseignants mais dont l'utilisation reste assez anecdotique : le boulier. A la fois instrument de calcul et outil de représentation de la numération, C. Vendeira Maréchal nous aide à distinguer les différents modèles proposés dans cette catégorie de machines, puis elle en propose des mises en pratique en classe. Toujours dans le domaine du calcul mais cette fois dans le contexte de l'enseignement professionnel, N. Kipfer et U. Scharnhorst présentent une séquence didactique en suivant un modèle tout à fait original en huit étapes qu'elles illustrent dans une expérimentation de classe autour de la circonférence d'une roue de vélo. Elles proposent ainsi une réflexion sur le transfert des compétences acquises scolairement, au monde de l'entreprise. Un troisième article concerne l'enseignement des mathématiques en secondaire 2, une contribution dans laquelle S. Ouailal et N. Achtaich exposent une démarche de remédiation d'erreurs classiques des élèves basée sur « la pédagogie de l'étonnement ». La situation est ancrée dans le domaine algébrique de la résolution des inéquations et permet de nombreuses réflexions sur la diversité des modalités de l'enseignement des mathématiques. Afin de boucler ce parcours d'expériences numériques, J.M. Favre propose une narration contextualisée dans l'enseignement spécialisé professionnel dans le domaine des grandeurs et mesures. Il raconte et rend compte de la relation d'aide entre un enseignant et une jeune apprentie confrontée au délicat problème des conversions d'unités, interaction qui permet à l'une de produire et à l'autre de comprendre ce dont l'apprentie est vraiment capable bien au-delà de l'information qu'aurait donné un test écrit.

Nous quittons ensuite le domaine des nombres et du calcul avec le texte de M. Chlostova qui compare trois contextes scolaires dans le cadre de l'enseignement de la géométrie. Enfin, J. Serment nous emmène au sein de sa classe de développement pour nous faire découvrir la mise en œuvre d'un labo de mathématiques issue de la proposition faite dans le numéro 226 de la revue : expériences octogonales avec Geogebra. On y découvre avec plaisir la richesse des propositions des élèves au sein d'une véritable situation d'apprentissage prouvant une fois encore que les démarches d'enseignement ne doivent pas se limiter à des cadres traditionnels, mais qu'elles peuvent sans cesse se pourvoir d'innovation et d'enthousiasme.

Enfin, notez bien, chères lectrices et chers lecteurs, que le prochain numéro 228 sera prêt dès la rentrée de septembre 2017. Nous vous donnons donc rendez-vous à cette date, et nous vous souhaitons d'ici là une très bonne lecture de ce numéro 227.

Pour le comité éditorial

Thierry Dias

Un boulier en classe de mathématiques : oui, mais lequel ?

Céline Vendeira

Université de Genève

Alors que les vertus du boulier sont reconnues pour l'enseignement du nombre à l'école, il semble que son utilisation ait quasiment disparu des pratiques enseignantes en France (Besnier, Bueno-Ravel, Gueudet & Poisard 2013).

Cet article propose de faire une recension des bouliers les plus connus. Nous nous intéressons à leur fonctionnement et leurs particularités. En deuxième partie d'article, nous nous focalisons sur le boulier russe en mettant en évidence son potentiel pour la classe à travers quelques pistes d'activités.

Cet article ne propose pas d'*analyse a priori*, mais il met plutôt en évidence le lien possible entre les activités proposées et les contenus du Plan d'Étude Romand (PER).

Abaques ou bouliers ?

Avant de débuter, il est nécessaire de s'accorder sur une définition des termes *boulier* et *abaque*. En langue française, nous utilisons souvent les deux termes comme des synonymes. Pour notre part nous considérons que le boulier est un type d'abaque comprenant certaines spécificités. La définition usuelle de l'abaque est celle d'un instrument plan mécanique facilitant le calcul. Quant au boulier, il « est formé d'un cadre et de boules fixées sur des tiges, ce qui permet une utilisation aisée » (Poisard, 2005, p.47). Nous retenons ainsi que le boulier a la particularité de pouvoir faire glisser sur une tige/colonne des perles sans retrait possible de ces dernières.

Fonctionnement des bouliers et injonctions officielles

Il existe différents types de bouliers. Certains sont destinés à être des « machines à calculer »[1]. D'autres bouliers sont plus spécifiquement conçus pour l'enseignement de la numération décimale.

Dans cette partie nous découvrons, le fonctionnement des bouliers chinois (ou *Suan pan*), japonais (ou *Soroban)* ainsi que russe (ou *Stchoty)* et du boulier à tiges[2]. Concernant le boulier russe, nous travaillons avec le boulier « Ikea », variante verticale[3] du boulier russe que l'on trouve communément en Europe occidentale.

En Suisse romande nous trouvons diverses références au boulier dans les injonctions officielles[4]. La plupart du temps le terme « boulier » est évoqué de manière générique, sans spécifier duquel il s'agit. Si l'on s'attarde sur les commentaires, on constate qu'ils sont de trois ordres :

1 Des vidéos en ligne montrent la rapidité avec laquelle une personne entrainée effectue des opérations.

2 Selon la définition retenue, le boulier à tiges ne rentre pas dans la catégorie des bouliers, mais dans celle plus générale des abaques. Nous utilisons toutefois le terme « boulier à tiges » étant donné qu'il s'agit du terme communément employé.

3 Il n'est pas disposé à plat sur la table, mais possède des pieds ou un support quelconque permettant son utilisation verticale.

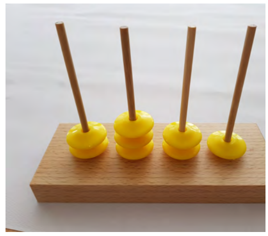
4 Nous nous focalisons sur les commentaires didactiques des moyens d'enseignement (1998), les parties introductives des moyens d'enseignement COROME et le Plan d'Etude Romand (MSN 12).

1) un renvoi explicite et fort entre l'utilisation des bouliers et notre système de numération ainsi que l'importance du zéro ;

2) une référence historique ;

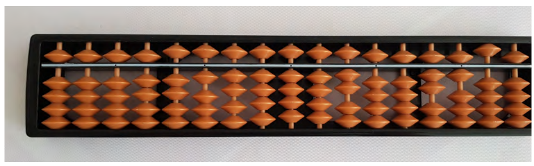
3) un lien fort établi entre le boulier et les algorithmes de calculs.

Suan pan (Chine).



Le boulier à tige.

Stchoty (Russie).



Soroban (Japon).

Image 1 : Bouliers les plus connus.

De manière générale, le boulier est un support auquel il est utile de recourir soit avec des élèves en difficulté, soit tout simplement pour accompagner les apprentissages.

Le boulier chinois

Ce boulier est utilisé essentiellement en Asie. Comme pour tous les bouliers, chaque nombre peut être représenté visuellement par une disposition particulière des boules. Les treize tiges sont divisées en deux par une barre transversale : deux boules valant cinq unités (quinaire) sur la partie supérieure et cinq boules valant une unité (unaire) sur la partie inférieure. Chaque tige correspond à un rang dans la numération, croissant en allant de la droite vers la gauche : unités, dizaines, centaines, etc. Dans la position initiale, les boules sont toutes disposées sur les bords extérieurs du boulier (signifiant ainsi zéro). Pour inscrire un nombre, les boules sont déplacées contre la barre centrale transversale. Un nombre peut être représenté de plusieurs manières. L'image 2 illustre une représentation du nombre dix.

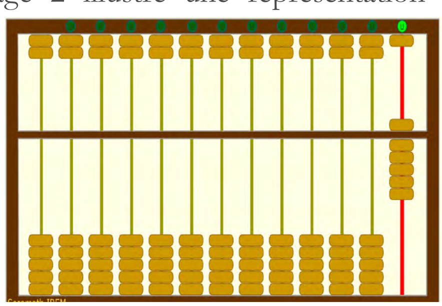


Image 2 : Un quinaire (en haut) et cinq unaires (en bas) dans la colonne des unités (soit 5+1+1+1+1+1).

Cette caractéristique a une influence sur les échanges possibles en cours de calculs. Il est en effet possible d'inscrire jusqu'à 15 dans chaque tige, sans devoir effectuer d'échanges. Cela permet de ne pas produire de surcharge cognitive chez les élèves, qui peuvent dès lors attendre la fin du calcul pour effectuer les échanges et rendre l'écriture économique.

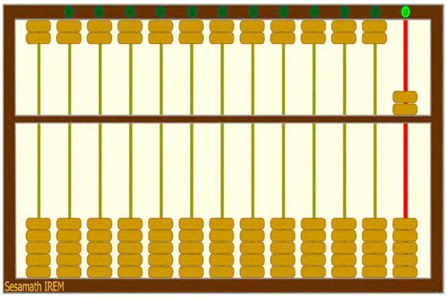


Image 3 : Deux quinaires (en haut) dans la colonne des unités (soit 5+5).

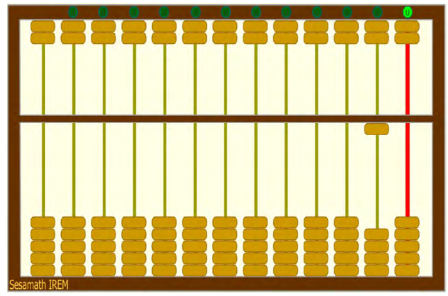


Image 4 : Un unaire (en bas) dans la colonne des dizaines (soit 10).

Image 5 : Deux représentations du nombre 1135. Celle de droite représente l'écriture économique.

De plus, les manipulations sur ce boulier sont proches de celles nécessaires pour réaliser la technique algorithmique enseignée à l'école. Le boulier chinois pourrait ainsi être un support à son introduction. Le boulier chinois possède donc des qualités indéniables pour l'enseignement des opérations.

C'est probablement, entre autres, pour cette raison qu'il est investi depuis plusieurs années dans des recherches en didactique des mathématiques. Toutefois, nous constatons que malgré son potentiel, il n'est pas investi dans l'enseignement. Une seule activité, en sixième (6H), « l'empire du milieu » permettant de découvrir son fonctionnement et de s'exercer à écrire et déchiffrer des nombres. Nous faisons l'hypothèse qu'il est trop éloigné culturellement des pratiques ayant cours en Europe occidentale pour qu'il soit véritablement utilisé dans nos classes.

Le boulier japonais

Le boulier japonais est proche du chinois : les tiges sont également divisées en deux par une barre transversale. Toutefois, la différence majeure concerne le nombre de boules par tige. En effet il y a, sur la partie supérieure, qu'une seule boule (quinaire) et, sur la partie inférieure, uniquement quatre boules (unaires). Ceci implique que chaque nombre a une représentation unique.

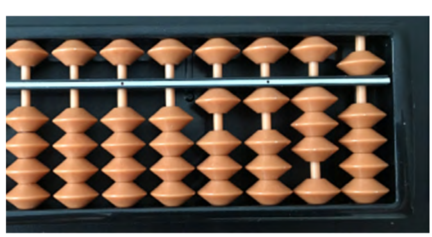


Image 6 : Représentation du nombre 1135.

Cette distinction est fondamentale, car elle ne permet plus le même type d'échanges qu'avec le boulier chinois et engendre donc d'autres procédures chez les utilisateurs.

Avec ce boulier, l'utilisateur procède de gauche à droite pour effectuer ses opérations, ce qui n'est pas représentatif de la procédure utilisée dans les algorithmes de calcul. C'est probablement l'une des raisons pour lesquelles les utilisateurs ont davantage de difficultés avec ce boulier. De plus, il nécessite un recours fréquent aux compléments à cinq et dix qui n'est pas habituel avec notre technique algorithmique de l'addition.

L'éloignement culturel ainsi que les divergences de pratiques expliquent probablement son absence de nos salles de classe ainsi que dans les injonctions officielles.

Le boulier à tiges

Le boulier à tiges comporte quatre tiges permettant chacune d'empiler un maximum de neuf perles. Ce boulier est un support à la compréhension de notre système de numération de position où l'aspect position et de manière plus implicite l'aspect décimal du nombre sont importants. Il permet ainsi d'obtenir des nombres de zéros (aucune perle) à 9'999 (avec neuf boules sur chacune des quatre tiges).

Image 7 : Exemple de l'inscription 2'521 avec le boulier à tiges.

Dans les injonctions officielles, nous pouvons lire à son propos que ce boulier permet une pratique des échanges « où l'on échange dix boules d'une tige contre une boule de la tige située immédiatement à gauche, où aucune tige ne peut contenir plus de neuf boules, mais où certaines tiges peuvent être vides » (aspect décimal). Ce boulier fait partie du matériel officiel de classe en Suisse romande. Il est distribué aux enseignants de cinquième et sixième primaire Harmos (5-6H) et neuf tâches des moyens d'enseignement, de la cinquième à la huitième année primaire (5-8H), impliquent son utilisation.

Le boulier russe « Ikea »

Le boulier russe comporte dix tiges comprenant dix boules pour neuf d'entre elles et quatre pour la dixième, représentatives des quarts de kopeck. Ce boulier se rencontre essentiellement en Europe occidentale et de l'est. Quant au boulier Ikea, il ne comporte que des tiges de dix boules chacune. Dans ce qui suit, nous nous référons à ce dernier, car c'est celui que nous rencontrons souvent dans les classes de l'école primaire.

Ce boulier peut être utilisé de deux manières différentes 1) chaque boule a la même valeur (une unité) permettant de traiter les nombres de zéro à cent 2) chaque boule a une valeur différente selon sa position sur le boulier (principe de notre numération de position). Nous développons dans la partie suivante ses potentialités ainsi que quelques pistes pour son utilisation en classe.

PISTES D'AIDES OU D'ACTIVITÉS AVEC LE BOULIER RUSSE

Le boulier russe peut être utilisé de multiples façons : mémoire de la quantité dans des situations de dénombrement ; compléments à 10 ; décomposition additive du nombre 10 (0 + 10, 1 + 9, 2 + 8, etc.) ; numération de position décimale, travail sur les grands nombres et les opérations. Dans ce qui suit, nous proposons de décrire quelques potentialités du boulier pour le cycle 1 ou 2 de l'école primaire suisse romande.

Certaines de ces activités ont été réalisées en classe, notamment dans l'enseignement spécialisé. Ces observations ne sont toutefois pas développés dans cet article.

Au cycle 1

► Les nombres de zéro à cent

Au cycle 1 de l'école primaire, de nombreuses situations problèmes impliquant le **dénombrement** sont proposées aux élèves. Ces dernières impliquent d'autres compétences et connaissances que la seule détermination du cardinal d'une collection. Il est, par exemple, souvent nécessaire de savoir organiser son dénombrement afin d'être certain de ne pas oublier ou compter deux fois un même élément (*énumération*). En plus de pointer correctement l'ensemble des éléments concernés, l'élève doit être capable de réciter simultanément la comptine numérique. Cette tâche est complexe pour certains élèves, notamment en première année primaire (1H). Le boulier peut s'avérer une aide en permettant de mobiliser d'abord uniquement les compétences d'énumération en procédant à de la correspondance terme à terme avec le boulier par le déplacement d'une boule pour chaque élément. Puis, une fois la collection d'éléments organisée en ligne sur le boulier, procéder au dénombrement en récitant la comptine numérique. On peut même imaginer que les élèves reconnaissent visuellement la quantité (subitizing) sans devoir la dénombrer (comme les constellations de points sur un dé qui sont reconnues sans les compter). Cette stratégie peut être favorisée ou non selon le boulier utilisé.

Image 8 : Dans le premier boulier les dix boules d'une même tige sont d'une couleur unique alors que dans le second boulier chaque cinq boules la couleur change impliquant une vision plus aisée du nombre cinq.

Toujours pour des élèves du cycle 1, il est fréquemment demandé de garder en mémoire une quantité, ce qui n'est pas aisé lorsque l'élève est justement en train de construire le nombre. Le boulier peut dès lors être un support, parmi d'autres, permettant de décharger cognitivement la mémoire des élèves.

Un autre type d'activité avec ce boulier serait de dévoiler une certaine configuration des boules aux élèves en leur demandant « Combien ? »[5].

Ci-dessous quelques exemples où selon la configuration proposée l'activité peut être envisagée de la première à la quatrième primaire (« Dénombrement d'une collection d'objets, par comptage organisé, par groupements de 10 » (PER)).

Cette activité permet aux élèves d'entrer dans des procédures de **calcul mental.**

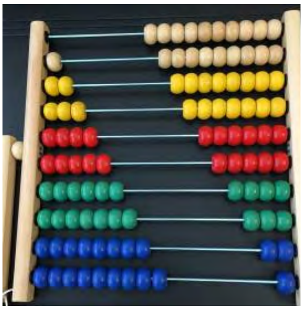
5 On retrouve des exemples de vidéos de classe sur https://www.reseau-canope.fr/BSD/index.aspx

Par exemple, dans l'image 10 les élèves peuvent procéder en faisant 10-1 = 9 sans devoir procéder au dénombrement des boules une par une. Pour l'image 11, les élèves additionnent les deux tiges de dix boules (10 + 10 = 20), voire ils emploient déjà la multiplication de dix boules par n tiges utilisées (2x10 = 20). Quant à l'image 12, ils peuvent effectuer dix boules x dix tiges = 100 puis cent boules moins une boule restante = 99.

Images 9 et 10 : Exemples avec 4 et 9.

Images 11 et 12 : Exemples avec 20 et 99.

Ce boulier permet également de travailler **les opérations d'additions et soustractions** avec des élèves de la première année primaire (avec le recomptage de l'ensemble des boules (PER) à la quatrième (avec la mémorisation du répertoire additif et soustractif). Il est ainsi possible de mettre l'accent sur les compléments à 10 (5 + ? = 10, 6 + ? = 10, etc.) et les différentes décompositions additives de 10 (0+10 – 1+9 – 2+8 - etc.).



Images 13 : Configuration sur le boulier russe pour travailler les compléments à dix et ses différentes décompositions additives.

▶ Les nombres au-delà de cent

Dans cette partie nous utilisons le boulier russe comme celui à tiges qui fonctionne sur **le principe de notre système de numération**. Chaque tige correspond à un rang dans la numération. Trois différences majeures peuvent toutefois être pointées entre ces deux bouliers : 1) l'orientation du support est verticale dans le boulier à tiges et horizontale dans le boulier russe[6] ; 2) il y a dix boules par tige dans le boulier russe contre neuf dans celui à tiges. Ce dernier point a une influence sur les manipulations engendrées ; 3) Les manipulations sont facilitées avec le boulier russe, car il suffit de faire glisser d'un côté à l'autre les boules alors qu'avec le boulier à tiges, il est nécessaire de retirer les perles, ce qui rend les manipulations bien plus laborieuses. Cet aspect n'est pas dérangeant lorsqu'il s'agit d'inscrire des nombres sur le boulier, par contre il le devient lorsqu'il s'agit d'effectuer des opérations. Ainsi, alors que le boulier russe peut s'apparenter à une machine à calculer, ce n'est pas le cas du boulier à tiges.

Au cycle 2

Sans avoir la prétention de présenter l'ensemble des activités possibles pour le cycle 2, nous en proposons dans ce qui suit, quelques-unes en lien avec un travail sur les grands nombres et les opérations.

Tout d'abord des tâches de **représentation et lecture de grands nombres** sont facilement réalisables avec ce support. Il est aussi possible de demander aux élèves d'effectuer quelques opérations plus ou moins complexes impliquant, par exemple, une succession de retenues compliquant considérablement les manipulations, par exemple en proposant d'effectuer sur le boulier l'addition 999'999+1, voire +n, et pour la soustraction 1'000'000-1, voire–n. Il est aussi possible de demander aux élèves d'**effectuer des multiplications** (ou divisions) tout en ayant conscience qu'il ne s'agit de rien d'autre qu'un procédé de décomposition du produit puis de distributivité.

Pour entrer davantage dans la manipulation de grands nombres, nous pouvons également les questionner sur le nombre qu'il est possible d'atteindre en comptant. Dans ce cas de figure, on utilise le boulier comme un compteur permettant d'atteindre 9'999'999'999. D'ordinaire, un compteur contient neuf boules et non dix (comme dans une voiture pour le kilométrage). C'est pour cette raison que si l'on compte jusqu'à 9'999'999'999, la configuration obtenue sur le boulier laissera apparaître une boule non utilisée sur chaque tige (image 14).

Images 14 : Configuration obtenue si l'on utilise le boulier russe comme un compteur.

Dans le même ordre d'idée, nous pouvons demander aux élèves de déterminer le nombre le plus grand qu'il est possible d'afficher avec un boulier russe. Cette fois-ci la réponse est 11'111'111'110.

---

6 Comme nous écrivons les nombres horizontalement et que le boulier russe implique une représentation verticale, cela peut nécessiter un temps d'adaptation chez les élèves. Nous renvoyons le lecteur au boulier de Marie Pape-Carpantier pour poursuivre la réflexion (https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00363431/document)

À noter que de nombreux sites internet proposent des idées pour construire un boulier avec ses élèves (voir les liens proposés en annexe). Des élèves plus âgés sont susceptibles d'être intéressés par des aspects historiques (développement puis utilisation du boulier).

Mot de la fin

Au regard des descriptions faites des différents bouliers (chinois, japonais, russe et à tiges), il semble bien que celui qui propose l'éventail le plus large de potentialités soit le russe, que ce soit pour travailler le nombre, les opérations ou des particularités de notre système de numération. De plus, les élèves du cycle 1 comme du cycle 2 sont concernés.

Nous espérons ainsi qu'à la lecture de ce rapide tour d'horizon des bouliers les plus connus vous serez tentés de mettre des bouliers entre les mains de vos élèves.

Références

Besnier, S., Bueno-Ravel, L., Guedet, G. & Poisard, C. (2013). Conception et diffusion de ressources pour la classe issues de la recherche. L'exemple des apprentissages numériques à l'école. In D. Butlen (Dir.), *Actes de l'école d'été 17 de didactique des mathématiques.* Nantes.

Poisard, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer.* Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille I.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP) (2010). P*lan d'étude Romand, 1er cycle, Mathématiques et Science de la nature. – Sciences humaines et sociales.* Neuchâtel : CIIP.

Gagnebin, A., Guignard, N. & Jaquet, F. (1998). *COROME : Apprentissage et enseignement des mathématiques : Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire.* Bienne: Ediprim SA.

quelques Liens

De nombreuses vidéos sont disponibles en ligne mettant en avant le côté spectaculaire des bouliers en Asie avec notamment des concours de calculs avec le boulier contre la calculatrice. Voici quelques liens sur les « machines à calculer » :

https://www.youtube.com/watch?v=lpg_UEvocE4;

https://www.youtube.com/watch?v=lEw3Y3hxkd8;

https://www.youtube.com/watch?v=TWWJEsCzIiM;

D'autres sites décrivent comment procéder pour construire des bouliers en classe :

http://www.momes.net/Bricolages/Objets-a-fabriquer/Petits-objets-a-creer/Fabriquer-un-boulier-chinois;

http://col21-gastonbachelard.ac-dijon.fr/spip.php?article106;

https://www.youtube.com/watch?v=BYKa6XrnxFc

Une didactique des mathématiques pour travailler le calcul professionnel[1]

Nadine Kipfer, Ursula Scharnhorst

Institut Fédéral des hautes études en Formation Professionnelle (IFFP)

Ce texte propose une réflexion sur l'enseignement des mathématiques dans la formation professionnelle initiale des apprentis. Il vise à montrer comment les mathématiques, plus précisément le calcul professionnel propre à chaque métier, peut être traité par les enseignants des branches techniques dans les écoles professionnelles. Cette thématique est très importante car depuis bien longtemps, les enseignants se plaignent que les apprentis ne savent plus calculer, compter, faire des règles de trois, etc. Cependant, tous (ou en tout cas la majorité d'entre eux) ont fréquenté l'école obligatoire et acquis un certain nombre des ressources (concepts et procédures mathématiques). Toutefois, lorsqu'ils commencent l'école professionnelle, les apprentis se trouvent confrontés à d'autres mathématiques que celles de l'école professionnelle uniquement : les mathématiques de l'entreprise. Lorsqu'on compare les mathématiques dans ces deux lieux, il est possible d'observer que les exigences ne sont pas les mêmes. Par exemple, pour le métier d'infirmier, à l'école professionnelle on demande aux apprentis de faire des calculs assez complexes sur la solution de perfusion (la « nursing rule »). Les observations faites par Hoyles, Noss, et Pozzi (2001) sur le lieu de travail, montrent que dans la pratique, les infirmiers s'appuient sur un barème (figure 1) qu'ils ont mémorisé. Par conséquent, aucun calcul n'est nécessaire.

20 mg	10 ml
10 mg	5 ml
5 mg	2.5 ml
1 mg	0.5 ml
0.5 mg	0.25 ml

Figure 1. Barème de calcul de la solution de perfusion.

Il ne s'agit donc pas du même type de calculs qu'il faut effectuer. Ceci met en relief le fait qu'il est difficile de les enseigner de la même manière dans ces deux contextes (Straesser, 2000). De plus, de par les différentes manières d'enseigner, les apprentis considèrent les deux lieux comme distincts, sans arriver à faire de liens entre les deux. Le risque qui peut en découler est que les mathématiques enseignées à l'école professionnelle peuvent entraver les apprentis à percevoir les mathématiques utilisées sur le lieu de travail (Forman & Steen, 2000). Dans un contexte comme celui de

1 Dans la formation professionnelle, le calcul professionnel est le terme utilisé pour parler des mathématiques qui sont enseignés à l'école professionnelle.

la formation professionnelle[2] (4 jours en entreprise et 1 en école professionnelle), l'enjeu est de préparer les apprentis à utiliser les mathématiques sur le lieu de travail de manière efficace (LaCroix, 2014). Pour que les deux lieux puissent se rejoindre et ainsi parler le même langage « mathématique », et que ce qui est réellement utile en entreprise soit enseigné à l'école professionnelle, la didactique des mathématiques telle que proposée dans le présent article peut offrir un soutien important. Elle permet ainsi aux apprentis de percevoir le système professionnel comme un tout et non pas composé de deux lieux distincts (Kaiser, 2014).

Dans la suite de l'article, nous commençons par définir en quoi consistent les séquences didactiques orientées sur les situations telles que nous les concevons. Nous donnons ensuite un exemple concret de leur utilisation dans le cadre de la formation des enseignants des branches techniques dans les écoles professionnelles. Nous terminons en soulignant les points positifs et ceux qui sont à améliorer, à partir de ce que nous avons pu observer lors des premiers essais de mise en pratique.

Les sequences didactiques orientees vers les situations pour enseigner le calcul professionnel

Les séquences didactiques orientées vers les situations consistent à amener les situations de travail dans lesquelles le calcul professionnel apparaît, à l'école professionnelle. Cette didactique prend tout son sens dans ce contexte, qui combine travail en entreprise et approfondissement théorique à l'école professionnelle. Afin de soutenir le transfert des compétences et ressources existantes des apprentis, Kaiser (2014) propose des séquences didactiques orientées vers les situations en huit étapes.

De façon générale, quatre aspects sont importants dans ce modèle didactique en huit étapes: (a) thématiser à l'école les situations vécues en entreprise, (b) utiliser et transférer les connaissances préalables, (c) introduire la solution des experts, et (d) stimuler une réflexion critique sur l'application du procédé en le transférant en entreprise (figure 2). Chacun de ces quatre aspects englobe deux étapes du modèle que nous allons présenter ci-dessous.

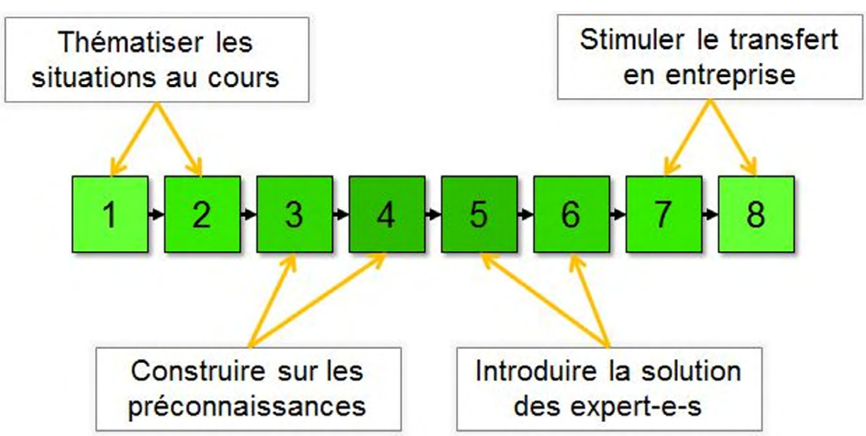


Figure 2. Les 4 aspects des séquences didactiques orientées sur les situations.

2 La formation professionnelle initiale en Suisse se déroule sur trois lieux de formation : l'école professionnelle (1 à 2 jours par semaine), l'entreprise formatrice (3 à 4 jours par semaine) et les cours interentreprises (entre 2 et 10 jours par année scolaire selon le métier appris).

Etape 1 : Attendre, jusqu'à ce que la situation ait été vécue en entreprise

La première étape assure la bonne mise en place des autres étapes : attendre, jusqu'à ce que la situation ait été vécue en entreprise. La raison est que l'enseignement et l'apprentissage de n'importe quel sujet est beaucoup plus facile si on peut relier ce qui est traité à nos propres expériences. Rien n'est plus difficile que de vouloir enseigner aux apprentis quelque chose pour laquelle ils n'ont aucune préconnaissance. De plus, la majorité des étapes suivantes ne peuvent être effectuées sans cette expérience préalable.

Etape 2 : revivre la situation en classe

La deuxième étape de la procédure est de faire revivre la situation de calcul vécue en entreprise dans le contexte de la classe. Pour ce faire, il faut que l'enseignant définisse la situation (p.ex. pour les boulangers, cuire le pain de seigle selon la recette) et ensuite il laisse les apprentis présenter leurs expériences et histoires vécues concernant cette situation afin de disposer de contextes réels. Vu qu'il s'agit de situations de calcul, il est bien sûr important que les aspects de « calcul » soient traités de manière prioritaire.

Etape 3 : activer les préconnaissances des apprentis

Lors de la troisième étape, il s'agit d'activer les préconnaissances des apprentis en leur demandant de résoudre une situation choisie portant sur le calcul professionnel (p.ex. selon la recette du pain de seigle, préparer les ingrédients pour 20 kg de pain). Cette tâche doit être authentique, reflétant la complexité réelle de la situation et de difficulté moyenne pour éviter que sa solution soit trop évidente. Cette tâche est résolue en groupe.

Etape 4 : présentation des solutions en pléniere

Lors de la quatrième étape, chaque groupe présente sa solution à tour de rôle. Les différentes solutions sont comparées et les forces et faiblesses discutées. Il peut arriver qu'une proposition ne donne pas lieu à une solution exacte, mais qu'elle contienne des pistes de réflexions partielles qui suffiraient pour une utilisation pratique, ou encore qu'une variante ne fonctionne pas, mais échouerait dans un autre contexte, etc. Cette phase est particulièrement importante, car elle permet d'identifier les points qui doivent être approfondis lors de la prochaine étape. Si tout est clair à ce stade, il est inutile de poursuivre avec les étapes suivantes.

Etape 5 : l'enseignant comme modèle

Dans la cinquième étape, l'enseignant détient le rôle principal. Le but est, qu'à l'aide d'un exemple concret, il montre comment résoudre professionnellement la situation de calcul donnée. Il fait une sorte de modelage ; en effet, ce que les apprentis savent déjà faire sur la base de leurs préconnaissances doit être porté à un niveau plus professionnel. Dans ce cas, le terme « modelage » ne signifie pas la démonstration parfaite d'un exemple bien préparé. Une telle performance réveille justement chez les apprentis ayant le plus de difficultés en mathématiques l'idée fausse que tout est facile. Il faut leur donner une image réaliste de ce que cela signifie, même pour une personne expérimentée, de résoudre une telle tâche.

Etape 6 : exercices inventés

Bien sûr, les apprentis doivent appliquer le modèle observé sur d'autres exemples. Au lieu d'utiliser des séries prédéterminées d'exercices, la sixième étape permet aux apprentis d'inventer des tâches. L'avantage est qu'ils n'exécutent pas simplement des exercices, mais ils continuent activement à s'engager dans la résolution de situations de calcul correspondantes.

Etape 7 : écrire un aide-mémoire

Avec la septième étape, le transfert en entreprise est initié. Les apprentis ont comme consigne de rédiger une feuille d'aide-mémoire personnelle contenant les notes qu'ils estiment nécessaires à avoir pour la prochaine résolution de calcul en entreprise (p.ex. la prochaine fois que je prépare un pain de seigle, je dois faire attention à la quantité d'eau que je mets dans mon pain et utiliser la règle mathématique correspondante). L'idée est qu'ils peuvent garder cet aide-mémoire sur eux et le consulter, au besoin, pendant le travail.

Etape 8 : transférer les acquis en entreprise

Dans la dernière étape, il s'agit de transférer ce qui fonctionne dans les situations traitées à l'école en entreprise. Si cette étape est accomplie avec sérieux, elle peut parfois prendre plus de temps que toutes les autres étapes. Il n'est pas toujours commun d'utiliser dans des situations en entreprise les principes compris auparavant sous forme de modèle. La transition vers l'utilisation en entreprise peut être préparée par le fait d'en avoir discuté au préalable, sur ce qui pourrait arriver si les apprentis devaient résoudre une telle tâche demain ou la semaine prochaine en entreprise.

Exemple de mise en pratique

Pour illustrer ces étapes, nous allons présenter la mise en pratique d'un enseignant de cours technique qui a travaillé sur la pose d'un ordinateur de vélo. La classe est composée de 22 apprentis qui suivent une formation de mécaniciens en cycle.

Etapes 1 et 2 : La situation sur laquelle l'enseignant désire travailler est celle de déterminer la circonférence d'une roue pour régler l'ordinateur de vélo (vitesse, distance). En effet, la première fois qu'on installe l'ordinateur de vélo, il faut régler les paramètres de l'appareil correctement pour que les kilomètres parcourus et la vitesse de route du cycliste soient correctement mesurés par l'ordinateur. Pour cela, il est nécessaire de connaître la circonférence de la roue. Lorsque la situation est traitée en classe, les apprentis sont déjà familiers avec cette situation. Ils relatent par exemple qu'ils ont monté l'ordinateur sur un vélo au travail mais que leur chef a réglé lui-même les paramètres. Ou encore qu'ils l'ont monté à l'aide du mode d'emploi mais qu'il ne fonctionnait pas correctement.

Etape 3 : Une fois les expériences rapportées, l'enseignant donne un exercice à effectuer en petits groupes. Cet exercice est structuré de la manière suivante : dans un premier temps une situation initiale est donnée (un client veut installer l'ordinateur sur son vélo. L'apprenti doit effectuer la tâche car le chef est occupé avec un autre client). La question posée est la suivante : « Comment contrôler que l'ordinateur enregistre la bonne vitesse et distance ? ». La question amène les apprentis à réfléchir sur la façon de procéder sans forcément focaliser sur la mesure de la circonférence. De cette manière, les apprentis sont actifs et discutent entre eux.

Etape 4 : Lors de la présentation des différents groupes, les apprentis amènent plusieurs pistes de résolution. Aussi dans cette étape, ils discutent de manière très animée et apportent des pistes intéressantes (p.ex. parcourir la distance mesurée a priori et voir si l'ordinateur prend en compte la même distance, noter la grandeur de la roue en consultant un tableau récapitulatif des différentes circonférences de roues).

Etape 5 : Lors de la présentation de l'enseignant, dans un premier temps il estime que le tableau récapitulatif des différentes circonférences de roues fourni par les fabricants est suffisant. Il montre où trouver les indications et comment l'utiliser (en lien avec la marge d'erreur). Mais étant donné que plusieurs groupes ont mentionné l'option de faire tourner la roue sur un tour complet pour en mesurer la circonférence (voir figure 3), l'enseignant explique comment effectuer cette tâche. Il souligne aussi qu'une fois que la roue a été mesurée, il faut consigner le chiffre obtenu sur une liste afin d'éviter de mesurer plusieurs fois la même roue.

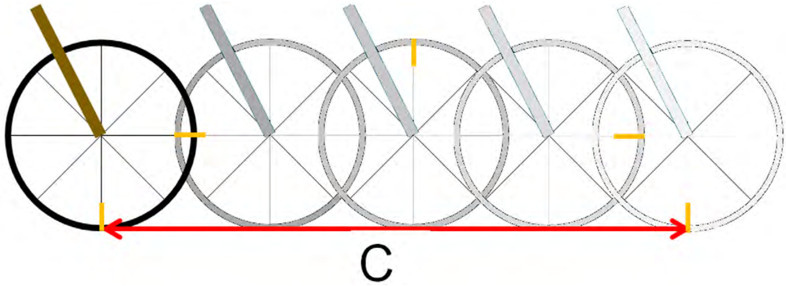


Figure 3. Faire tourner la roue pour connaître la circonférence.

Etape 6 : Ensuite, les apprentis n'ont pas, comme postulé par le modèle didactique, inventé des exercices, mais c'est l'enseignant qui les a formulés auparavant (série d'exercices). Ce choix a été fait par l'enseignant car il estimait que la taille de la classe (22 apprentis) était trop importante pour les laisser inventer des exemples.

Etape 7 : Lors de la rédaction des aide-mémoires, l'enseignant propose aux apprentis de ne pas noter la procédure décrite dans la figure 3, mais directement les circonférences des différentes roues. C'est le choix de l'enseignant et pas celui des apprentis. Le fait de noter des résultats dans un aide-mémoire plutôt que des procédures, peut amener les apprentis à ne plus savoir quelle procédure il faut utiliser pour arriver au résultat rapporté dans l'aide-mémoire. Il est donc important de laisser à chacun la possibilité d'estimer ce qu'il doit noter et qui pourra lui être utile de retour en entreprise.

Etape 8 : Pour l'application en entreprise, l'enseignant propose aux apprentis de discuter directement dans leur propre entreprise de l'utilisation des aide-mémoires. Les retours après quelques semaines sont positifs : par exemple, certains patrons ont affiché l'aide-mémoire en entreprise et d'autres demandent toujours de mesurer la circonférence (voir figure 3).

Dans cet exemple, il est possible d'observer que l'enseignant a pu parcourir les 8 étapes du modèle en y apportant quelques modifications (étapes 6 et 7). Dans cet exemple, ces modifications ne semblent pas avoir posé problème aux apprentis. Toutefois, laisser les apprentis inventer les exercices d'eux-mêmes (étape 6) permet de voir qu'ils ont réellement compris comment résoudre la situation. Pour l'étape 7, leur suggérer quoi écrire pourrait être un problème pour certains apprentis. En effet, le contenu de l'aide-mémoire ne sera pas utile s'ils ne sont plus en mesure d'interpréter les résultats notés hors du contexte. L'enseignant a souligné que l'expérience a été très intéressante et fructueuse. Etant donné la réaction positive des apprentis, il a décidé de continuer à travailler avec ce type de séquences didactiques.

Les experiences faites

Outre l'exemple de l'enseignant présenté ci-dessous, plusieurs enseignants ont testé les séquences didactiques orientées vers les situations avec leurs apprentis et fourni un document écrit retraçant les expériences faites sur les 8 étapes. Les situations abordées portaient sur différents thèmes comme « Est-ce un angle droit ? » (menuisiers), « Freiner en douceur » (mécaniciens) ou encore « La longueur des tuyaux inclinés » (sanitaires). A partir de ce recueil d'information (pour les consulter voir www.hrkll.ch uniquement en allemand), nous avons identifié certains points forts mais aussi difficultés perçues par ces enseignants dans la mise en pratique de cette méthode.

Concernant les forces, les enseignants soulignent que les apprentis sont beaucoup plus actifs pendant le cours. Ils s'engagent davantage à entrer dans la tâche, à réfléchir et échanger avec les autres. Il a été remarqué par certains enseignants, que même les apprentis qui d'habitude sont plutôt silencieux, ont commencé à prendre la parole et à vouloir discuter de leurs expériences. De plus, ils peuvent réfléchir en profondeur à des situations en entreprise et les comparer avec les différentes manières de travailler des collègues.

Les différents modes de travail (en individuel, en petits groupes ou en plénière) qui peuvent être utilisés ont aussi été retenus comme un point portant les apprentis à s'activer davantage.

Concernant les difficultés, elles portaient d'une part sur le fait que pour utiliser ce type de séquences, comme dit à l'étape 1, il est important que la majorité des apprentis aient déjà vécu la situation. Ceci pourrait poser un problème lorsque l'enseignant veut commencer une thématique prévue dans le programme. Pour dépasser ceci, certains enseignants donnent une consigne (trois à quatre semaines avant d'être traitée en classe) aux apprentis portant sur la situation qu'ils doivent observer ou essayer d'accomplir en entreprise.

Une autre difficulté soulignée était le temps que la mise en pratique des séquences didactiques prend : même si elle est efficace pour aborder les points essentiels et travailler de manière concrète, elle demande plus de temps qu'un cours traditionnel. Toutefois, une fois que la routine est installée, la mise en place prend bien moins de temps.

Conclusions

Les expériences faites montrent que les séquences didactiques en 8 étapes sont un outil efficace pour travailler le calcul professionnel. Les enseignants qui l'ont essayé se sont montrés enthousiastes et estiment continuer à l'utiliser par la suite. Ces séquences ont permis justement aussi aux apprentis de réaliser que les deux contextes de formation peuvent traiter les mathématiques de manière similaire.

Les futures expériences nous permettront de voir comment les enseignants novices arrivent à mettre en place ce type de séquences didactiques. Il sera aussi possible de voir si sur le long terme, les enseignants continueront d'utiliser les séquences didactiques en 8 étapes comme méthode d'enseignement pour travailler le calcul professionnel.

Références

Forman, S., L., & Steen, L. A., (2000). Bringing school and workplace together. In A. Bessot & J. Ridgway (Ed.), *Education for mathematics in the workplace* (pp. 83–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Hoyles, C., Noss, R. & Pozzi, S. (2001). Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(1), 4-27.

Kaiser, H. (2014). Coordinating learning inside and outside the classroom in vocational education and training. In A. Hector-Mason & S. Beeli-Zimmermann (Ed.), *Adults learning mathematics – inside and outside the classroom* (pp. 19-27). Proceedings of the 21th International Conference of Adults Learning Mathematics, Berne.

LaCroix, L. (2014). Learning to see pipes mathematically: preapprentices' mathematical activity in pipe trades training. *Educational Studies in Mathematics, 86*(2), 157-176. doi:10.1007/s10649-014-9534-6Lave

Straesser, R. (2000). Mathematical means and models from vocational contexts. In A. Bessot & D. Ridgway (Ed.), *Education for mathematics in the workplace* (pp. 65-80). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Résolution des inéquations : une situation-problème étonante pour remédier aux erreurs

Salek Ouailal, Naceur Achtaich

Centre régional des métiers de l'éducation et de la formation. Agadir

Membre associé à l'Observatoire de Recherche en didactique et Pédagogie Universitaire (ORDIPU), Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca (Maroc)

Introduction

Voilà un constat partagé par la majorité des professeurs de mathématiques qui est devenu une habitude scolaire : c'est lors de la correction en classe des copies du devoir surveillé que l'on peut avoir des idées supplémentaires sur les erreurs des apprenants. Cependant, ces séances n'ont parfois pas les effets escomptés sur les élèves : peu de remédiation des erreurs, non remise en cause des conceptions erronées, et ce, en dépit des efforts fournis par les professeurs et notamment des différentes méthodes de correction employées. Souvent, les élèves sont peu impliqués dans la correction. En effet, une grande partie d'entre eux sont dans une situation de stress du fait qu'ils attendent leurs notes, et une autre se contente de recopier ce qu'il y a au tableau de manière passive. Dans ces conditions, nombre de professeurs n'arrivent pas à se satisfaire du déroulement de telles séances.

À la marge des discussions autour des questions d'enseignement et d'apprentissage menées avec des élèves à ce propos, on signale souvent la phrase suivante « Ce n'est pas surprenant, je m'attendais à ceci ...». Une telle phrase est déclamée à la fois par le groupe des "bons" élèves dans le sens qu'il n'y a pas de surprise dans les étapes de résolution des exercices proposés puisqu'ils les ont tous réussis ; et aussi par les élèves dits "en difficulté" d'apprentissage, confirmant qu'ils ont commis des erreurs, mais sans qu'ils fassent un effort pour comprendre au moins la différence avec leurs propres réponses. L'erreur pour ce dernier groupe est loin d'être une surprise !

À l'exception des erreurs scolaires, du type étourderie ou distraction dues à l'ennui, qui dépendent des particularités de l'élève, les deux types d'erreurs qui nous intéressent sont les erreurs collectives écrites, produites par les élèves, dues à des habitudes scolaires ou témoignant chez eux de fausses représentations (Astolfi, 1991). Ces deux dernières sont souvent liées à la façon naïve de penser les objets mathématiques.

Dans le but de différencier notre choix didactique des problèmes qui jouent, sans doute, un rôle spécifique sur l'apprentissage, nous allons nous référer à ce que la littérature didactique appelle la « pédagogie de l'étonnement » (Mathieu, 2010) ou encore « s'étonner pour apprendre » (Meirieu, 2014) pour faire face à l'erreur scolaire. Notre visée majeure est de permettre à l'élève adolescent de développer une pensée formelle réflexive qui puisse l'engager à exercer un deuxième regard constructif et critique sur ses démarches habituelles de travail dans l'activité mathématique.

Dans le contexte d'une "pédagogie de l'étonnement", nous allons discuter une combinaison possible de paradoxes en mathématiques et de situations d'apprentissages pour définir une nouvelle situation, que nous pensons pertinente afin de remédier à quelques erreurs fréquentes en Algèbre : nous allons la nommer situation-problème étonnante.

La situation-problème étonnante (SPE)

Description du dispositif

Afin d'aborder l'erreur scolaire par l'étonnement, nous souhaitons mettre en place un dispositif particulier d'apprentissage qui pousse l'élève adolescent à s'engager volontairement à changer ses représentations mentales et qui permette traiter des erreurs persistantes. Ceci, bien entendu, après un conflit cognitif voulu, inévitable. On appellera l'ensemble de ces tâches, situation-problème étonnante (SPE). Une SPE est composée de deux parties :

- Une première partie sous forme d'un paradoxe en mathématiques, qui peut être un raisonnement d'apparence logique, donnant lieu à une conclusion étonnante, avec comme but l'émergence d'une erreur spécifique.
- La deuxième partie est une situation qui exige l'utilisation de plusieurs types de connaissances et dont l'erreur (ou les erreurs) discutée(s) dans la première partie est masquée et a priori inévitable.

Nous tenons à préciser qu'une SPE doit être proposée en fin d'apprentissage à la différence de la situation-problème au sens de Brousseau (1998) qui s'utilise au début de l'apprentissage. L'enjeu didactique porte sur l'apport de l'étonnement vu comme élément essentiel illustrant le conflit cognitif qui s'opère chez l'apprenant, motivant la recherche d'explication et donc le dépassement d'une connaissance ancienne vers une connaissance nouvelle.

Les caractéristiques de la SPE

Une situation-problème étonnante devrait :

- être liée à une erreur persistante issue d'une représentation mentale inadéquate ;
- faire naître un étonnement chez les élèves ;
- créer une rupture amenant à déconstruire le modèle explicatif habituel et erroné ;
- correspondre à deux situations : une première faisant apparaitre des démarches ordinaires non complexes, pouvant s'ouvrir sur une conclusion d'apparence logique acceptable mais non correcte à cause d'une erreur. Une deuxième qui amène l'apprenant à procéder prudemment par une recherche cognitive permettant de réorganiser ses connaissances antérieures pour ne pas reproduire l'erreur ;
- déboucher sur une remédiation durable de l'erreur.

Expérimentation didactique de la SPE

Contexte de l'expérimentation

Dans l'enseignement secondaire au Maroc, les équations et inéquations algébriques du second degré sont enseignées au niveau de la première année du lycée. Ce chapitre d'Algèbre est d'une importance capitale pour l'élève au lycée, vu ses applications en tant qu'outil dans le champ de l'Analyse en particulier pour l'étude et la représentation des fonctions numériques. Il s'applique aussi aux questions de détermination du signe d'une fonction numérique ou du signe de sa dérivée ...

Les erreurs qui nous paraissent plus intéressantes sont celles issues des habitudes scolaires ou des pratiques langagières des mathématiques. Ainsi on entend souvent dire dans les classes la phrase : « Après simplification, on trouve … » au lieu de dire par exemple : « On multiplie les deux membres par … ». Nous nous intéressons aussi aux erreurs dues à des représentations mentales chez les élèves : « une variable est positive... »

Les deux erreurs ciblées par notre SPE sont :

« Si $mx = my$ alors $x = y$ »

et « Si $mx \leq my$ alors $x \leq y$ »

Ces deux erreurs méritent bien un traitement didactique particulier, ce qui est confirmé aussi par la littérature (voir par exemple Sackur & Maurel, 2000).

Énoncé de la situation-rpoblème étonnante

Notre situation-problème étonnante est composée de trois parties : les deux premières sont sous forme de paradoxes mathématiques, et la troisième est une situation abordant la résolution d'une équation/inéquation. Cette partie C présente une question non ordinaire, pour laquelle on n'impose pas de suivre une méthode algébrique ou bien géométrique, le changement de cadre de résolution est laissé au choix de l'élève.

Voici son énoncé :

Partie A :

Lisez bien la démonstration suivante :

Soit x un réel tel que $x = y$

Alors $xy = y^2$

et par suite $xy - y^2 = x^2 - y^2$

En utilisant l'identité remarquable :

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

on trouve : $y(x-y) = (x-y)(x+y)$

Après simplification on aura : $y = x + y$

Or, $y = x$ donc $y = 2y$.

On simplifie par y et on déduit que $1 = 2$.

Qu'est-ce que vous pensez du résultat obtenu ? Comment expliquez-vous ceci ?

Partie B :

Lisez bien la démonstration suivante :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Alors $a(a-b) < b(a-b)$.

D'après la loi de distributivité, on obtient :

$a^2 - ab < ba - b^2$.

d'où : $a^2 - 2ab + b^2 < 0$

En utilisant l'identité remarquable :

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

on déduit que : $(a-b)^2 < 0$.

Qu'est ce que vous pensez du résultat obtenu ? Comment expliquez-vous ceci ?

Partie C :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^3 - 4x^2 = 5x$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$x^2 - 4x + 3 \geq \frac{-2}{x}.$$

Analyse a priori de la SPE, première prise en compte de quelques paramètres

À la 15ème semaine de l'année scolaire, après une séquence d'enseignement sur les équations/inéquations, nous avons distribué la partie C (seulement) de la situation à deux classes (59 élèves) d'un « bon » niveau. Chacune des classes est sous la responsabilité de trois étudiants professeurs de notre CRMEF[1]. Notre but était d'avoir une idée préalable sur toute erreur possible sur le sujet proposé. On a imposé que la tâche se fasse individuellement par chaque élève durant une heure. On a ainsi noté qu'il y a effectivement deux erreurs fréquentes qui constituent des obstacles d'ordre épistémologique, à savoir, la simplification ou la multiplication par une inconnue x dans les deux membres d'une équation (ou d'une inéquation).

Lecture didactique de la situation-problème étonnante proposée

Les erreurs à travailler sont maintenant précisées, il s'agit bien de l'opération de la « simplification par la variable » (qui peut être nulle!) ou bien « la multiplication par la variable des deux membres d'une inéquation » (qui peut être négative!). Pour changer de telles démarches de résolution, nous avons proposé dans les parties A et B deux paradoxes mathématiques, présentant des raisonnements utilisant des techniques habituelles. Mais qui conduisent aux deux conclusions impossibles suivantes : 1=2 et $x^2 \leq 0$.

Nous souhaitons ainsi voir la réaction des élèves, leur étonnement et l'exploiter pour son intérêt pédagogique. Cette étape de notre travail a nécessité une réunion avec notre groupe d'étudiants professeurs afin de souligner la nécessité du travail individuel pour cette tâche. Ces derniers ont recommandé de distribuer des polycopiés pour que les élèves travaillent individuellement sans donner des indications aux autres sur le passage erroné dans les démonstrations. Ils ont aussi suggéré de laisser un temps suffisant pour la recherche pour donner à l'apprenant le temps de « se parler à soi-même » dans le but de créer chez lui des conflits mentaux : investigation, étonnement, questionnement, doute, relecture, remise en question...

Pour la partie C, on suggère le travail en petits groupes pour profiter des interactions pédagogiques résultant de la dynamique des groupes. Comme dit précédemment le changement de cadre de résolution est laissé au choix de l'élève et l'usage d'une calculatrice scientifique est autorisé.

1 Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation où les étudiants professeurs suivent une année de qualification qui se décompose en deux semestres. Chacun est composé de 13 semaines. Au cours de l'année ils bénéficient de 12 semaines d'étude théorique et 14 semaines de pratique.

Déroulement de l'expérmentation

L'expérience s'est déroulée, dans six classes (première année du lycée, série scientifique) sur un échantillon de 206 élèves d'un niveau hétérogène. La période de l'expérimentation a été celle où les élèves étudiaient le chapitre d'analyse « Paraboles et hyperboles ». L'horaire de la programmation a été laissé adaptable aux contraintes de chacun des six professeurs dans les établissements. Le tableau ci-dessous présente le scénario de déroulement de la séance estimée à deux heures trente minutes environ :

Durée estimée	Consignes
15 min	Explication de la démarche de travail ; Répartition (aléatoire) des élèves en petits groupes de cinq élèves.
25 min	Distribution de la partie A (premier paradoxe) ; Travail individuel de 15 min ; Discussion des productions des élèves.
25 min	Distribution de la partie B (deuxième paradoxe) ; Travail individuel de 15 min ; Discussion.
1h 25 min	Distribution de la partie C ; Travail collectif ; Discussion.

Tableau 1 : Scénario de l'expérimentation.

Travail des élèves et analyse de l'expérimentation

Autour de la partie A : premier paradoxe

La discussion des résultats des élèves a pris plus que le temps estimé. Il s'agit dans cette partie, d'une situation qui nécessite des outils élémentaires d'Algèbre. Cependant plus de 87 % n'ont pas pu déceler l'erreur. A la première lecture la certitude que la conclusion 1=2 est fausse pousse la majorité des élèves à croire que la faille existe et est facile à trouver. Lors de la deuxième lecture, les choses commencent à changer, un défi naturel s'enclenche pour essayer de trouver l'erreur et être le premier à la trouver. Les relectures se poursuivent parfois rapidement et parfois très lentement. Une partie des élèves pose les stylos avec des signes de fatigue, ils attendent la correction !

Certainement, il y a un vertige mental pour les apprenants, le temps est presque écoulé et la pression augmente, c'est la même atmosphère de classe que lors des devoirs surveillés, certains élèves demandent plus de temps de recherche et d'autres, à force d'entendre qu'il faut apprendre les identités remarquables par cœur, oublient qu'il s'agit juste d'un outil de calcul auxiliaire. Un des effets de l'étonnement dans ce cas est que l'élève commence à douter des formules classiques habituelles.

Un moment fort d'apprentissage : développement d'une pensée algébrique

Après ces discussions, les apprenants attendent la correction de la part du professeur. Ce moment de silence causé par l'étonnement, qui place tout le groupe dans un projet d'attention volontaire, est – nous pensons – l'une des clés pédagogiques. Le professeur a écrit au tableau en majuscules le mot « SIMPLIFIER », comme une étincelle pour lancer une deuxième recherche collective de l'erreur. Quelques instants après, une phrase est prononcée par un élève : « on a simplifié par zéro » … « Oui » dit le professeur. Puis il écrit au tableau : « 0x2017 = 0x1 implique 2017 = 1...! », ce qui illustre l'erreur.

En conclusion, les apprenants ont mieux compris le sens du mot « simplifier » et ses limites, ils ont été convaincus d'employer l'expression « multiplication par un nombre non nul ». On peut espérer que ce soit un premier pas pour remplacer la pensée arithmétique par une pensée plus algébrique.

Autour de la partie B : deuxième paradoxe

Le travail sur le deuxième paradoxe, se fait de la part des élèves avec autant de sérieux et de défi. Néanmoins, cette fois plus de 92% n'ont pas trouvé l'explication. Le scénario est semblable à celui du premier paradoxe, sauf que cette fois les apprenants sont très pressés de voir la correction.

Le thème de la discussion tourne autour du signe de a et du signe de b. Une étude de cas est faite au tableau. Le professeur dévoile l'erreur explicitement en donnant l'exemple suivant : multiplions l'inégalité $-10 \leq 5$ par -10 on trouve …$100 \leq -50$ ...!

Le temps a été suffisant pour que le groupe retienne la phrase formulée par un élève : « il faut faire attention au sens d'une inéquation lors de la multiplication par un scalaire ».

En conclusion, les élèves ont pu porter un deuxième regard conscient sur leurs habitudes scolaires d'aborder les mathématiques. Nous pensons que cette conscientisation aidera fortement à remédier aux deux erreurs evoquées.

Autour de la partie C

Les élèves, à ce moment de la séance, sont satisfaits et convaincus par les deux « conclusions » déduites des deux parties précédentes. Le travail est maintenant par groupes de cinq élèves. Nous présentons les productions des élèves accompagnées de quelques commentaires.

Rédaction du groupe 3 :

$$x^2 - 4x + 3 \geq \frac{-2}{x};$$

$$x^2 - 4x + 3 + \frac{2}{x} \geq 0;$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{x} \geq 0$$

Premier cas : $x > 0$; $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

Deuxième cas : $x < 0$.

On pose $x = -|x|$;

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{-|x|} \geq 0$$

On multiplie par le nombre négatif « moins un ». On aura :

$$(x-2)(x^2-2x-1) \leq 0$$

Commentaires :

Les élèves dans cette rédaction ont voulu « échapper » à la multiplication des deux membres de l'inéquation, ils essayent donc de ne pas commettre l'erreur discutée dans la partie B. Ils ont donc « amené » la quantité figurant dans le deuxième membre de l'inégalité dans le premier membre. Cependant, après addition de la fraction rationnelle et du polynôme, le problème persiste. Ils se trouvent cette fois face à la multiplication par la variable x. Prudemment, ils ont distingué le cas correspondant à x strictement positif (ils évitent de multiplier par x nul, erreur discutée dans la partie A).

Une nouvelle représentation mentale s'est dégagée dans ce groupe. C'est à force de chercher à multiplier par des quantités positives, qu'ils ont utilisé la valeur absolue dans le cas où x est négatif. Voilà un effet positif de l'étonnement !

Rédaction du groupe 5 :

$$x^2 - 4x + 3 \geq \frac{-2}{x}.$$

Premier cas : $x = 0.$

L'inégalité est impossible !

Deuxième cas : $x > 0$

$$x\left(x^2 - 4x + 3\right) \geq -2\ ;$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 \geq 0;$$

Troisième cas : $x < 0$

$$x\left(x^2 - 4x + 3\right) \leq -2;$$

$$\left(x-2\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) \leq 0.$$

Commentaires :

Ce groupe a choisi de multiplier dès la première ligne par la variable x. Sauf qu'ils sont conscients du fait que x ne doit pas être nul, c'est pourquoi ils l'ont pris comme cas particulier d'étude. Ceci a permis à ce groupe d'éviter une autre erreur fréquente, celle de chercher l'ensemble de définition d'une inéquation, que la majorité des élèves ne précise pas au début de la résolution des inéquations. Cette rédaction, est un modèle typique du raisonnement par étude de cas. Un autre effet positif de l'étonnement est l'amélioration de la rédaction mathématique. En effet, les élèves ont analysé l'inégalité $\left(x-2\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) \geq 0$ en traitant séparément le signe de chacun des facteurs formant le produit.

Rédaction du groupe 2 :

Premier cas : $x \geq 0$

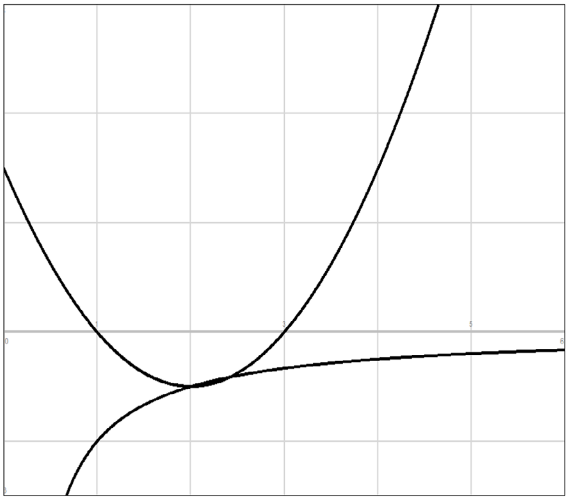


Figure 1.

<u>Deuxième cas :</u> $x \leq 0$

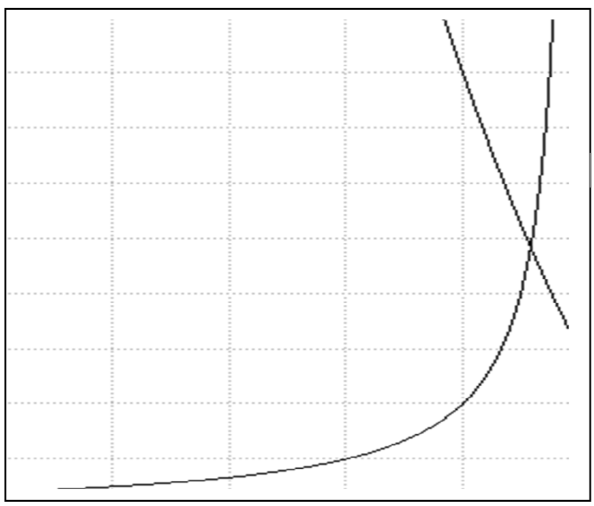


Figure 2.

Commentaires :

Ce groupe « prudent » a choisi de s'éloigner de l'approche algébrique de résolution, en traçant dans un même repère les graphiques qu'ils ont l'habitude de représenter couramment dans le chapitre « Paraboles et hyperboles ». Ils ont pris leur temps pour tracer séparément les deux graphiques sur chaque demi-plan (voir Figure 1 et Figure 2).

Dans une deuxième étape, ils ont résolu des équations algébriques, pour déterminer les points d'intersection des deux courbes. Ils justifient ceci en disant qu'il y a moins de « risque » de travailler avec des équations que des inégalités.

Les groupes ayant choisi de procéder dans le cadre graphique sont ceux qui ont souvent réussi la résolution du problème. Certains groupes ont fait une résolution algébrique erronée, mais ils ont pu, grâce à la représentation graphique, refaire le travail tout en cherchant leurs erreurs.

Conclusion

Dans la perspective de modifier les modèles habituels de pensée chez les apprenants adolescents, souvent source d'erreurs mathématiques scolaires, nous avons présenté dans ce travail un outil didactique sous le nom de situation-problème étonnante pour faire réfléchir les professeurs sur la nécessité de différencier leurs approches d'enseignement en passant par l'étonnement chez l'apprenant. Comme on a pu le voir dans l'expérimentation, l'étonnement issu de notre situation a engagé l'élève à réfléchir plus profondément sur ses processus intellectuels, et ainsi modifier d'une manière qu'on espère durable certaines de ses conceptions erronées sur des objets mathématiques.

Peut-on parler même d'un étonnement scolaire ? D'une pédagogie de l'étonnement ? N'est-t-il pas temps de changer quelques situations d'apprentissage de « routine » dans les programmes scolaires ? Passer du type de situations soigneusement élaborées ou des situations d'ostension des objets mathématiques à des situations étonnantes ouvrant sur l'exploration et la pensée mathématique face à quelques erreurs en mathématique ?

Références

Astolfi, J.-P. (1991). *L'erreur, un outil pour enseigner. Paris :* Collection ESF.

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Mathieu, A. (2010). Pratique d'une pédagogie de l'étonnement en mathématiques en classe de seconde. *Expressions, 35*, 93-117.

Meirieu, Ph. (2014). Mais où est donc passé l'étonnement ? *Éducation permanente, 200*.

Sackur, C. & Maurel, M. (2000). Les inéquations en classe de la seconde une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x, 53*, 5-26.

Interagir avec Del pour découvrir un peu de ce qu'elle sait et… aller de l'avant

Jean-Michel Favre

CFPS du Château de Seedorf et groupe ddmes[1]

Introduction

La narration qui suit vise à thématiser les difficultés que rencontre tout enseignant qui cherche à établir des bilans de compétences en mathématiques à partir d'une simple épreuve papier-crayon. Ce mode de faire, que l'on désigne parfois maladroitement par les termes d'évaluation pronostique ou diagnostique, est pourtant fréquemment en usage lorsqu'on travaille avec des élèves en difficulté. En effet, par le fait même que ces élèves soient considérés comme en difficulté, l'enseignant ne peut, comme c'est le cas dans une classe ordinaire, s'appuyer sur un programme antérieur considéré comme acquis, pour y ancrer son enseignement. C'est donc l'élève, plutôt que le programme, qui sera interrogé pour chercher à déterminer où l'enseignement pourra commencer.

Cette opération de substitution entre le programme et l'élève procède en outre d'une légitimité unanimement partagée chez ceux qui travaillent avec des élèves en difficulté, sous prétexte qu'en agissant de la sorte, on vise à prendre comme points d'appui les savoirs qu'ils auraient acquis antérieurement. Or elle présente pourtant un risque intrinsèque conséquent : à savoir que la forme d'interrogatoire auquel on soumet les élèves, qui plus est lorsque celui-ci prend la forme d'une épreuve papier-crayon, s'avère bien incapable de révéler l'existence de tels savoirs ou pis, ne fait que confirmer l'étendue de leurs difficultés. Nous avons qualifié ailleurs de rapport à l'ignorance (Conne, 1999 ; Favre, 2015) la relation que tout enseignant qui interagit avec des élèves en difficulté entretient vis-à-vis de ce qu'ils savent, en montrant qu'au lieu d'essayer vainement de le réduire, il s'agit plutôt d'apprendre à en jouer[2].

Contexte

L'interaction a lieu dans un centre de formation professionnelle et sociale - il s'agit du CFPS du Château de Seedorf - qui accueille, au terme de leurs années d'école, des élèves qui ne peuvent suivre un apprentissage directement en entreprise et qui, pour bon nombre d'entre eux, ont passé tout ou partie de leur scolarité dans l'enseignement spécialisé. Elle met aux prises un enseignant et une stagiaire de seize ans, le premier proposant à la seconde une épreuve de mathématiques qui a précisément été conçue pour déterminer ce qu'elle a pu apprendre de cette matière à l'école. L'épreuve

1 Le groupe ddmes (didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé) est subventionné par l'AVOP (Association vaudoise des organismes privés pour personnes en difficulté) : http://www.avop.ch.

2 Qui est à notre sens la seule alternative pour prendre en charge l'incertitude de nos interactions et faire en sorte que l'ignorance de l'enseignant ne se confine pas uniquement à dévoiler celle des élèves, mais lui intime une posture qui soit porteuse de nouveaux possibles pour interagir avec eux.

s'articule autour de six domaines mathématiques : numération, opérations, problèmes numériques, mesures, géométrie et logique. Chaque domaine comporte deux fiches d'exercices. La stagiaire peut choisir l'ordre dans lequel elle souhaite appréhender les domaines. Elle dispose d'une calculette pour effectuer ses exercices, à l'exception de ceux qui concernent le domaine des opérations.

Narration

Ce matin, j'accueille Del pour la première fois en classe. Elle est seule, alors que je reçois habituellement les stagiaires par groupe de trois ou quatre, au cours des deux semaines qu'elles passent à Seedorf en vue d'y accomplir une formation professionnelle. Del est en dernière année de scolarité dans une classe ordinaire et c'est la première fois qu'elle effectue un stage professionnel. Je n'ai pas reçu d'informations particulières sur les raisons qui font qu'elle se retrouve à faire un stage dans un centre pour apprentis en difficulté. Quand je lui demande si elle aime l'école, elle me répond par la négative, renchérissant même qu'elle ne l'aime pas du tout. Pourtant, lorsque j'insiste en suggérant qu'il y a peut-être une branche qu'elle affectionne malgré tout, elle évoque… les mathématiques. J'en profite alors pour lui avouer que c'est aussi ma discipline de prédilection et que j'espère donc que l'on prendra plaisir à échanger à son sujet.

Cette entrée en matière avec une nouvelle stagiaire n'est pas banale, du fait d'une part que nous nous retrouvons à deux dans la classe et d'autre part parce que ce n'est pas si souvent que j'en rencontre une qui dit ne pas aimer l'école, mais apprécier les mathématiques.

Après lui avoir proposé deux épreuves de lecture et une d'écriture, je l'engage à passer aux mathématiques. Au tableau, j'écris les six domaines dans lesquels je vais lui proposer des exercices et l'invite à choisir par lequel elle souhaite commencer. Après quelques instants d'hésitation, Del opte pour le domaine des mesures et je lui soumets donc la première des deux fiches correspondantes (cf. figure n°1). Comme elle est seule en classe, je m'assieds à côté d'elle et lui fais découvrir les trois exercices qui s'y trouvent. Dans l'exercice n°1, je lui indique qu'on y trouve des questions concernant les unités de mesure que l'on rencontre dans les domaines de l'argent, des poids, des longueurs et des capacités : je donne l'exemple de la première question : « combien y a-t-il de centimes pour un franc ? » pour illustrer le domaine de l'argent. Comme Del acquiesce, faisant mine de saisir mes propos, je passe sans autre à l'exercice n°2. Désignant le premier item : « 3 kg = …3… g », je lui dis qu'il s'agit ici de compléter des égalités ; je précise qu'on a « trois kilos » d'un côté du signe = et qu'on souhaite savoir à combien de grammes cela correspond de l'autre côté du signe ; j'ajoute qu'il y a déjà un chiffre 3 dans le résultat écrit sur la feuille et qu'il s'agit de le compléter avant et/ou après ; puis, de façon à ce qu'elle saisisse la signification de chaque abréviation d'unité qui figure dans l'exercice, j'interprète chacun des items à voix haute en énonçant successivement : « Trois mètres, ça fait combien de centimètres ? Trois litres, ça fait combien de décilitres ? etc. »

Cette façon de procéder vise à lever certaines ambiguïtés, comme celle que comporte l'abréviation « l » de l'unité « litre » qui est parfois « lue » comme le chiffre « 1 ».

En arrivant à l'exercice n°3, j'annonce que l'on entre ici dans le domaine des fractions et demande à Del si on lui a enseigné cet objet durant ses années d'école. Vu qu'elle répond par l'affirmative, je lui explique que chacun des trois schémas correspond à une fraction qu'il s'agit dès lors de retrouver. Elle semble bien comprendre ce que je veux lui dire et, me levant de ma chaise où je m'étais assis pour lui laisser un peu d'espace pour travailler, je l'invite à compléter sa fiche d'exercice.

Au moment où Del entame la résolution des trois exercices, je m'attends à ce qu'elle y parvienne aisément. Je me demande même si elle ne va pas trouver qu'ils sont trop faciles. Le fait qu'elle soit en classe ordinaire (dans sa dernière année de scolarité), qu'elle m'ait confié qu'elle appréciait les mathématiques et qu'elle m'ait paru bien comprendre les explications que je lui apportais constituent trois facteurs à l'origine de cette interprétation.

Mesures (a)

1. Combien y a-t-il ?

Combien y a-t-il de centimes dans un franc ? ....

Combien y a-t-il de grammes dans un kilo ? ....

Combien y a-t-il de minutes dans une heure ? ....

Combien y a-t-il de centimètres dans un mètre ? ....

Combien y a-t-il de décilitres dans un litre ? ....

Combien y a-t-il de millimètres dans un centimètre ? ....

Combien y a-t-il de jours dans une année ? ....

Combien faut-il de pièces de 10 centimes pour avoir 2 francs ? ....

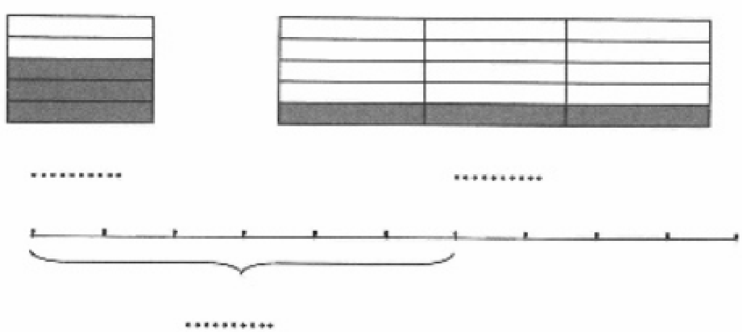
	4

2. Complétez les égalités qui suivent.

3 kg =	......3......g	3 mm =	......3......cm
3 m =	......3......cm	3 g =	......3......kg
3 l =	......3......dl	5 h =	......3......min

	3

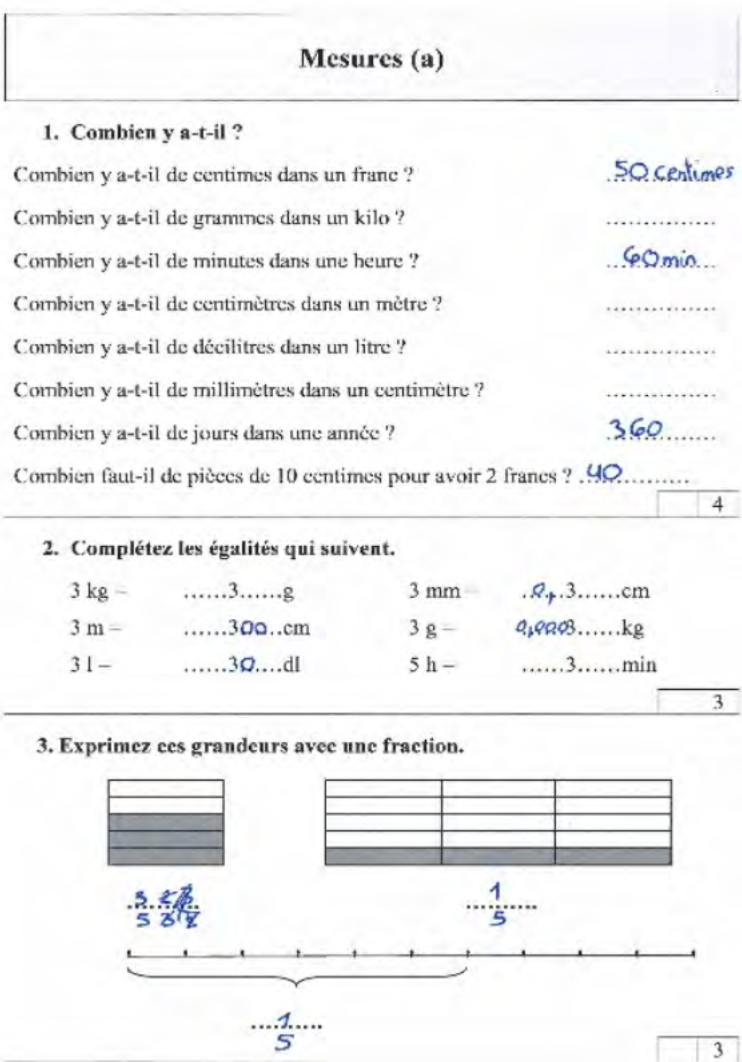
3. Exprimez ces grandeurs avec une fraction.



	3

Figure n°1 - Fiche « mesures » vierge

Quelques minutes après, Del m'interpelle pour me dire qu'elle a terminé son travail. Me rapprochant d'elle, je découvre avec passablement de surprise ce qu'elle a écrit sur sa fiche (cf. figure n°2). Dans l'exercice n°1, elle a complété quatre items (sur huit), en inscrivant « 50 centimes » comme nombre de centimes dans un franc ; « 60 min » comme nombre de minutes dans une heure ; « 360 » comme nombre de jours dans une année et « 40 » comme nombre de pièces de 10 centimes pour « avoir 2 francs ». Dans l'exercice n°2, elle a complété quatre items sur six : « 3 m = 300 cm », « 3 l = 30 dl », « 3 mm = 0,3 cm » et « 3 g = 0,0003 kg ». Dans l'exercice n°3 enfin, elle a complété les trois items, en écrivant 3/5 (après avoir successivement tracé 2/3 et 3/2) sous le premier schéma, *1/5 sous le deuxième schéma et 1/5 à nouveau sur le troisième schéma. A la lecture de ses résultats, je lui demande si elle peut en compléter d'autres sur sa fiche, mais elle répond par la négative.*



Mesures (a)

1. Combien y a-t-il ?

Combien y a-t-il de centimes dans un franc ? .50 centimes

Combien y a-t-il de grammes dans un kilo ? ....

Combien y a-t-il de minutes dans une heure ? ..60 min..

Combien y a-t-il de centimètres dans un mètre ? ....

Combien y a-t-il de décilitres dans un litre ? ....

Combien y a-t-il de millimètres dans un centimètre ? ....

Combien y a-t-il de jours dans une année ? 360.......

Combien faut-il de pièces de 10 centimes pour avoir 2 francs ? .40.........

4

2. Complétez les égalités qui suivent.

3 kg =	......3......g	3 mm =	..0,.3......cm
3 m =	......300..cm	3 g =	0,0003......kg
3 l =	......30....dl	5 h =	......3......min

3

3. Exprimez ces grandeurs avec une fraction.

....1....
5

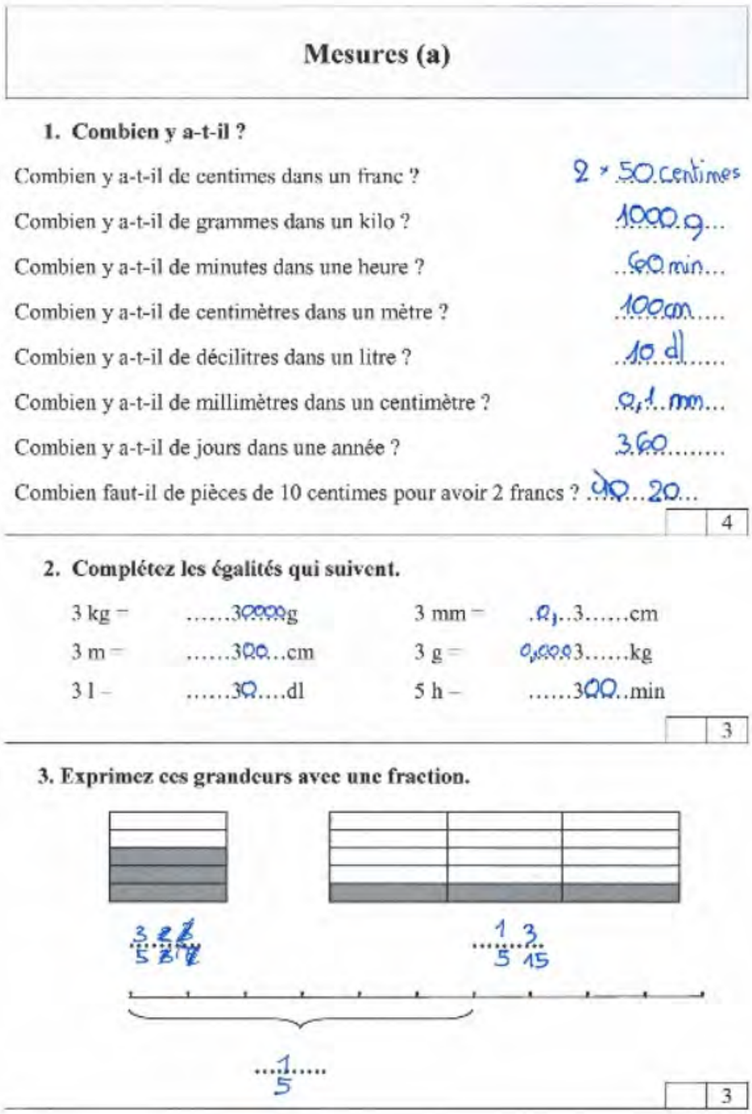
....1....
5

3

Figure n°2 - Fiche « mesures » complétée par Del avant l'interaction

La surprise que j'éprouve à la découverte de ses réponses tient d'abord à ce que, contrairement à mes attentes, Del n'a pas pu compléter tous les items de la fiche, et que, parmi ceux qu'elle a complétés, plusieurs l'ont été de manière erronée : le « 50 centimes », le « 360 », le « 40 » pièces dans l'exercice n°1, tout comme le « 1/5 » placé sous le troisième schéma de l'exercice n°3 apparaissent très étonnants pour une élève de seize ans en provenance de l'école ordinaire. Ensuite, ce qui paraît bien difficile à comprendre, c'est comment cette stagiaire est parvenue à répondre correctement (ou presque), sans recourir à un tableau de conversion, aux quatre items de l'exercice n°2 qui engagent des rapports d'unités entre mètre et centimètre, centimètre et millimètre, litre et décilitre, gramme et kilogramme, alors que dans l'exercice n°1 elle n'a pu répondre aux items les concernant ; inversement, on observe aussi qu'avoir répondu, dans l'exercice n°1, qu'une heure comporte soixante minutes ne lui a pas permis, dans l'exercice n°2, de compléter l'item « 5 h = …3… min » ; et l'on voit même qu'à l'interne de l'exercice n°2, le résultat : « 3 g = 0,0003 kg » n'implique pas pour Del de pouvoir compléter sa réciproque : « 3 kg = …3… g », pourtant moins complexe à résoudre (car n'impliquant que des nombres naturels).

Profitant du fait qu'elle soit seule en classe, je décide alors d'interagir quelques instants avec elle à propos des résultats qu'elle a inscrits sur sa feuille. Je commence ainsi par lui dire que, contrairement à ce qu'elle affirme, je pense qu'au vu de ce qu'elle a déjà fait, il lui est assurément possible de trouver d'autres réponses. Pour l'engager dans cette voie, je désigne l'item : « 3 g = 0,0003 kg » sur sa fiche, en suggérant qu'il devrait sans doute pouvoir l'aider à compléter l'item : « 3 kg = …3… g ». Sans hésiter, Del répond : « Ah ouais, trente mille » et inscrit (cf. figure n°3) quatre zéros à la suite du 3 figurant dans l'égalité : « 3 kg = …30000 g ». Je poursuis en lui disant que fort de ces deux résultats, elle devrait également pourvoir répondre à la deuxième question de l'exercice n°1 que je lui lis : « Combien y a-t-il de grammes dans un kilo ? ». Del répond : « mille », à nouveau sans aucune hésitation, et écrit : « 1000 g » sur sa fiche. Je l'invite alors à revenir sur son résultat précédent : « 3 kg = …30000 g », mais elle confirme qu'il s'agit bien de trente mille.



Mesures (a)

1. Combien y a-t-il ?

Combien y a-t-il de centimes dans un franc ? 2 × 50 centimes

Combien y a-t-il de grammes dans un kilo ? 1000 g

Combien y a-t-il de minutes dans une heure ? 60 min

Combien y a-t-il de centimètres dans un mètre ? 100 cm

Combien y a-t-il de décilitres dans un litre ? 10 dl

Combien y a-t-il de millimètres dans un centimètre ? 0,1 mm

Combien y a-t-il de jours dans une année ? 360

Combien faut-il de pièces de 10 centimes pour avoir 2 francs ? 90 … 20

4

2. Complétez les égalités qui suivent.

3 kg =	……30000 g	3 mm =	.0,.3……cm
3 m =	……300…cm	3 g =	0,0003……kg
3 l =	……30….dl	5 h =	……300..min

3

3. Exprimez ces grandeurs avec une fraction.

3/5 2/3 [illegible]

1/5 3/15

1/5

3

Figure n°3 - Fiche « mesures » complétée par Del après l'interaction

Ce qui frappe dans ce début d'échange, c'est la « facilité » avec laquelle Del parvient maintenant à tirer parti du résultat « 3 g = 0,0003 kg » pour déterminer celui de « 3 kg = 30000 g », puis à en « déduire » qu'il y a 1000 grammes dans 1 kilo, alors qu'elle n'était pas parvenue à le faire auparavant. Un peu comme si ces relations qui apparaissent soudainement dans l'échange s'étaient avérées indisponibles dans la situation où elle se trouvait seule face à sa fiche et que c'était cet échange avec l'enseignant qui permettait maintenant de les révéler. On remarque aussi étonnamment que le fait qu'il y ait mille grammes dans un kilo n'entre pas en contradiction avec celui que « 3 kg = 30000 g », comme si ces deux propositions pouvaient coexister séparément après s'être engendrées l'une l'autre. Il est par ailleurs probable que le résultat 0,0003 que Del a écrit sur sa fiche provienne du rapport 1/1000 qui définit la relation kg/g, en faisant apparaître une suite de quatre chiffres à droite de la virgule qui est caractéristique du nombre « mille ». Le « trente mille » proviendrait ensuite d'une lecture inversée de ce nombre 0,0003 où la réciprocité des deux rapports kg/g et g/kg s'incarne par un retournement des chiffres du premier nombre pour obtenir le second. Enfin, le fait que les deux propositions « il y a mille grammes dans un kilo » et « 3 kg = 30000 g » n'entrent pas en contradiction tend à montrer que ce qui se joue au niveau de l'écriture des nombres reste bien distinct ce qui se joue au niveau du rapport entre les deux unités.

L'échange se poursuit en pointant tour à tour les items : « 3 m = 300 cm », « 3 l = 30 dl » et « 3 mm = 0,3 mm » qu'elle a complétés dans l'exercice n°2 que j'associe à chaque fois à leur correspondant de l'exercice n°1. Je la vois ainsi noter, sans peine aucune, les réponses « 100 cm », « 10 dl » et « 0,1 mm » aux questions demandant successivement : « Combien y a-t-il de centimètres dans un mètre ? de décilitres dans un litre ? et de millimètres dans un mètre ? ».

Dans la même veine de ce qui s'est passé juste auparavant, les relations apparaissent l'une après l'autre de façon très fluide, étant comme déduites d'un item à un autre. Le « 0,1 mm » a manifestement été produit à partir du « 0,3 cm », tout comme l'ont été préalablement les « 100 cm » à partir du « 300 cm » et les « 10 dl » à partir des « 30 cl ». Et comme précédemment, l'écriture produite n'entre pas en contradiction avec le rapport liant les deux unités.

A propos de l'item : « Combien y a-t-il de centimes dans un franc ? », je lui indique que la réponse qu'elle a écrite me semble difficilement « tenable » puisque : « cinquante centimes n'est pas la même chose qu'un franc ». J'entends Del murmurer « deux cinquante » que je l'invite à inscrire sur sa feuille et qu'elle traduit par le chiffre 2 et le signe x qu'elle dispose devant le « 50 centimes » qui figurait déjà sur sa feuille. Je lui demande ensuite de vérifier le « 40 » qu'elle a donné comme résultat à l'item « combien y a-t-il de pièces de 10 centimes pour avoir 2 francs ? » et, très vite, je la vois tracer « 40 » pour le remplacer par « 20 ». Enfin, je lui dis que si elle a montré dans l'exercice n°1 qu'elle savait qu'une heure comportait soixante minutes, elle devrait assurément pouvoir compléter l'item : « 5 h = …3… ». Del avance tout d'abord « trois cent soixante » qu'elle corrige en « trois cent » à l'instant où je lui glisse la calculette pour vérifier.

A nouveau, l'échange permet d'accéder à des savoirs qui n'avaient pu émerger dans un premier temps. Il y a bien maintenant :

- « 2 x 50 centimes » dans un franc ; Del n'est d'ailleurs pas la première stagiaire à proposer « 50 » comme réponse à cet item, sans que je ne parvienne pour autant à en proposer une interprétation satisfaisante : est-ce parce que la pièce de « 50 centimes » serait celle dont la valeur se rapproche le plus d'un franc ? ou bien est-ce parce que lorsque l'on considère le rapport franc/centime, c'est le rapport de moitié qui s'inscrit comme le plus immédiat ?) ;

- « 20 » et non pas « 40 » pièces de 10 centimes pour obtenir 2 francs ; on peut penser ici que Del avait compté par 5 plutôt que de compter par 10 (cinq centimes au lieu de dix centimes) pour aboutir à 40.
- et « 5 h = 300 min » ; si la très grande majorité des stagiaires que j'ai rencontrées sait qu'une heure comporte soixante minutes, il est fréquent que l'item « 5 h = …3…min » ne soit pas complété. Le fait que contrairement aux cinq autres, ce soit un 5 et non pas un 3 qui apparaisse dans la première partie de l'égalité n'y est sans doute pas étranger.

L'interaction se termine par l'examen des réponses qu'elle a apportées à l'exercice concernant les fractions où je lui demande, parmi les trois réponses qu'elle a données, de désigner celles dont elle est bien certaine. Del répond qu'elle bien sûre de la première (3/5), mais qu'elle l'est moins pour les deux autres. Je lui demande alors ce qu'elle aurait pu mettre sous le deuxième schéma et je la vois écrire « 3/15 » juste à côté du « 1/5 » qu'elle avait inscrit précédemment ; je procède de même pour le troisième schéma, mais là, elle répond qu'elle ne sait pas.

Dans ce dernier exercice, on observe que Del a commencé par utiliser les deux parties distinctes du premier schéma pour constituer les fractions 2/3 et 3/2 avant de se raviser pour considérer l'une des parties par rapport au tout et obtenir 3/5. S'agissant du second schéma, il est plutôt surprenant de remarquer qu'elle soit directement parvenue à obtenir la fraction 1/5, au lieu de passer par 3/15 qui correspond mieux aux nombres de rectangles qu'il est possible d'y repérer. Quant au troisième schéma, il est plus difficile[3] d'interpréter comment Del a pu s'y prendre pour aboutir à 1/5.

Après avoir terminé cette fiche consacrée au domaine des mesures, Del opte pour celle comprenant quatre problèmes numériques où l'un d'entre eux comporte des conversions de mesures de poids (cf. figure n°4)

Un cuisinier achète 500g d'oignons, 800g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance.

Quel poids indiquera la balance ?

~~1150~~

Elle indiquera ~~1,150~~ **……… kg.**

4'351,15

Figure n°4 - Exercice de la fiche « problèmes numériques » résolu par Del après l'interaction

Le premier résultat qu'elle a écrit sur sa fiche est 1,150. Lorsque je lui propose d'examiner ce problème en lui demandant ce qu'elle a compris de l'énoncé (elle avait tout rempli très vite et m'avait confié qu'elle n'était pas certaine de sa réponse), elle me répond en gros (je ne me souviens plus exactement ce qu'elle m'a dit) qu'il y a des légumes dans un panier qui est posé sur une balance. Suite à cela, je l'observe tracer son résultat de 1,150 pour le remplacer par 1150. J'esquisse alors une ébauche de dessin sur sa fiche comprenant un panier posé sur une balance comprenant différents légumes à l'intérieur, en précisant qu'il s'agit de déterminer le poids du tout. Elle me demande s'il faut soustraire et je lui réponds qu'il s'agit plutôt d'additionner les différentes quantités, vu qu'on veut déterminer leur poids total. Del se saisit alors de la calculette, commence à opérer, puis trace le résultat de 1150 pour le remplacer par 4'351,15 dont elle se satisfait. Lorsque je lui demande comment elle s'y est prise pour calculer, elle me répond qu'elle a fait : « cinq cents, plus huit cents, plus mille deux cents, plus huit cent cinquante, plus mille plus un virgule cent cinquante » pour l'obtenir.

3 Mais peut-être qu'un lecteur averti y parviendra tout de même.

Je joins ce dernier extrait de mes échanges avec Del, simplement[4] pour faire état de la facilité déconcertante avec laquelle elle réalise ici les conversions de 1,2 en 1200 et de 1 en 1000 au cours de l'addition qu'elle effectue sur une calculette. Une facilité qu'il était bien difficile d'anticiper pour qui l'a vue ne pas répondre à la question « Combien y a-t-il de grammes dans un kilo ? ou ne pas compléter l'item : « 3 kg = …3…g » dans la fiche précédente…

Conclusion

L'analyse détaillée des productions de Del et des échanges auxquels elles ont donné lieu, montre combien l'usage d'une épreuve papier-crayon pour tenter de déterminer les savoirs acquis par une élève en mathématiques s'avère limitative. La comparaison des résultats figurant sur la fiche « mesures » avant et après l'interaction en apporte une illustration saisissante et cela sans - il importe de le souligner - que l'enseignant se substitue à la stagiaire pour les produire. On voit en effet que c'est précisément cette interaction qui va contribuer à rendre manifestes des savoirs qui, en son absence, seraient restés cachés. Et l'on observe également que la résolution d'une autre tâche (cf. figure n°4) contribue à enrichir leur présence chez la stagiaire, ce qui vient renforcer l'intérêt de recourir à une variété de tâches (Giroux, 2007 ; Favre, 2008) pour être pleinement en mesure d'y participer.

Plus largement, c'est l'image même de la stagiaire qui se transforme du tout au tout au cours de l'interaction : basculant d'une élève dont l'enseignant ne sait pas grand-chose au départ, vers une élève présentant d'importantes difficultés en mathématiques après le premier remplissage de sa fiche d'exercices, pour aboutir, au terme de l'échange, à une élève dotée d'un potentiel certain et dont il peut dès lors envisager la poursuite de l'exploration[5]. Dans le même mouvement, ce sont de nouvelles perspectives de travail qui s'ouvrent avec elle, dans le sens où il ne s'agit plus de revenir en arrière par la répétition d'un enseignement de savoirs antérieurs qu'elle n'aurait pas encore acquis, mais bien d'aller de l'avant pour l'aider à mieux rendre disponibles et à utiliser de façon plus efficace ceux qu'elle est déjà parvenue à s'approprier.

Références

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In F. Conne & G. Lemoyne (Ed.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp.31-69). Montréal : Presses Universitaires de Montréal.

Favre, J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N, 82*, 9-30.

Favre, J.-M. (2015). *Investissements de savoirs et interactions de connaissances dans un centre de formation professionnelle et sociale : une contribution à l'étude des mathématiques et de leur fonctionnement dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée.* Thèse de doctorat. FAPSE, Université de Genève. [On Line] https://archive-ouverte.unige.ch/unige:76939.

Giroux, J. (2007). Maillage de situations didactiques dans des classes de l'adaptation scolaire. In J. Giroux & D. Gauthier (Ed.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp. 35-63). Montréal : Editions Bande didactique.

4 Je ne discute pas ici de nos hésitations respectives - elle, pour trouver l'opération qui lui permettra de résoudre le problème ; moi, pour l'aider à s'en faire une représentation adéquate - ni non plus de ce qui peut la faire osciller entre les nombres 1,150 et 1150, ni encore du fait qu'elle ne remet nullement en question le résultat de 4'351,15 produit par la calculette qui, au vu des données figurant dans l'énoncé, devrait lui paraître aberrant.

5 On ne saura finalement pas si, comme cela avait été envisagé en début d'échange, Del a pu tout autant que moi prendre plaisir à faire des mathématiques au cours de cette brève interaction.

Petite séquence sur le Labo-maths - Expérience octogonale avec GeoGebra

Jimmy Serment

Etablissement primaire de Pully, HEP Vaud

Contexte et explication de l'expérimentation

Je travaille dans une classe développement de l'Etablissement de Pully. Les élèves sont âgés de 10 à 12 ans et présentent des difficultés variées d'apprentissage, comme de la dyslexie, des soucis de concentration, de la difficulté en raisonnement mathématique. Si ces enfants sont dans ma classe, c'est qu'ils n'arrivent pas à suivre le programme dans une classe ordinaire de 7H ou 8H, ils ont chacun un programme personnalisé en français et en mathématiques.

Je relate ici une petite séquence de 3 périodes s'appuyant principalement sur le Labo-Maths (Dias, 2016) de la revue Math-Ecole n°226. Les exercices de géométrie proposés se centrent essentiellement sur le MSN21 du Plan d'études romand et plus précisément sur la :

- Construction de droites parallèles et perpendiculaires
- Reconnaissance, description et dénomination de figures planes (triangles, quadrilatères, cercle) selon leurs propriétés
- Construction des figures planes les plus courantes à l'aide des instruments de géométrie

La première période est composée de trois parties qui se font toutes individuellement :

1) Tracer des parallèles et des perpendiculaires avec GeoGebra, à partir des sommets d'un octogone régulier. (S1T1.ggb)

2) Rechercher des quadrilatères avec GeoGebra, à partir des sommets d'un octogone régulier. (S1T2.ggb)

3) Mise en commun et au propre sur papier de ces deux premières activités. (MEC1.pdf)

La deuxième période est aussi composée en trois parties :

1) Tracer des quadrilatères imposés avec GeoGebra, à partir des sommets d'un octogone régulier. Travail individuel. (S2T1.ggb)

2) Trouver des propriétés communes aux diagonales des figures imposées, avec GeoGebra. Travail par groupe. (S2T1.ggb complété ou S2T2.ggb)

3) Mise en commun des propriétés des quadrilatères imposés en fonction des diagonales. Travail au tableau blanc interactif (TBI) avec toute la classe. (MEC2.doc)

La troisième période est plus libre mais se fait en deux temps et en binômes :

1) Réaliser un modèle libre, avec GeoGebra, à partir des sommets d'un octogone régulier. (S3T1.ggb)

2) Réaliser le modèle d'un autre camarade.

Mise en œuvre des expérimentations

Mes élèves connaissant déjà un peu le logiciel GeoGebra, la prise en main de ces activités a donc été facilitée. Peu de questions sont apparues sur le fonctionnement du programme. La première tâche se déroulant sur un menu très allégé (point et segment seulement comme outils), je pense que cette adaptation a été pertinente.

Dès les premières lectures des consignes, une question a été soulevée à propos de la signification des mots « perpendiculaires » et « parallèles ». La consultation des autres élèves a permis d'obtenir des réponses satisfaisantes du type « comme un angle droit » ou « le coin d'une feuille de papier » pour perpendiculaire. Pour le mot parallèle, j'ai dû orienter les élèves sur la définition de deux droites ne se croisant jamais.

Une fois ces mots expliqués, les élèves ont pu se lancer dans l'exercice. Durant celui-ci, deux constats principaux me sont apparus. Le premier est que la partie de l'exercice concernant la notion de parallèles a été plus vite réalisée que celle sur la perpendicularité. Les élèves semblent avoir eu plus de difficultés à trouver des angles droits que de trouver une paire de côtés parallèles dans leurs tracés. Mon deuxième constat est qu'aucun élève n'a pris le soin de vérifier ses constructions avec des outils disponibles avec le logiciel GeoGebra, toutes les constructions étant réalisées « à l'œil ».

Concernant les productions sur la perpendicularité, je présente ici la diversité des tracés :

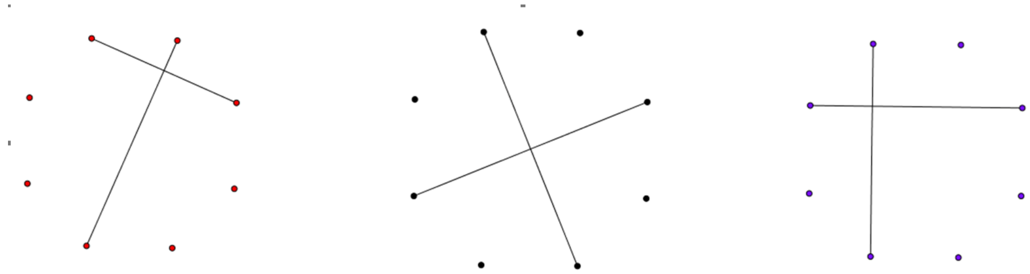


Image 1 : diverses perpendiculaires trouvées

Comme on pouvait quand même l'anticiper, de nombreux segments perpendiculaires ont été effectués de manière horizontale et verticale, mettant en évidence une certaine stéréotypie prégnante :

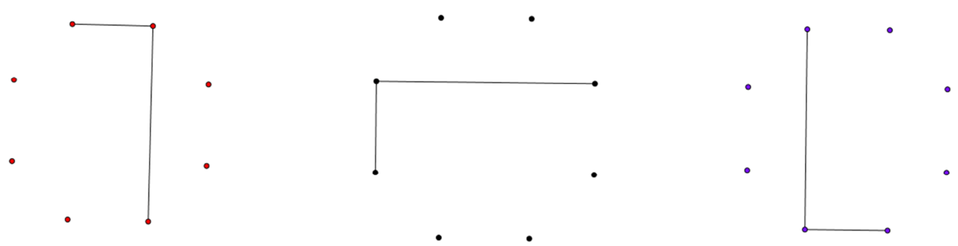


Image 2 : perpendiculaires stéréotypées

Concernant l'exercice sur les parallèles, les élèves ont eu moins de problèmes à en trouver, bien que souvent ils aient opéré par une simple rotation de la première paire trouvée :

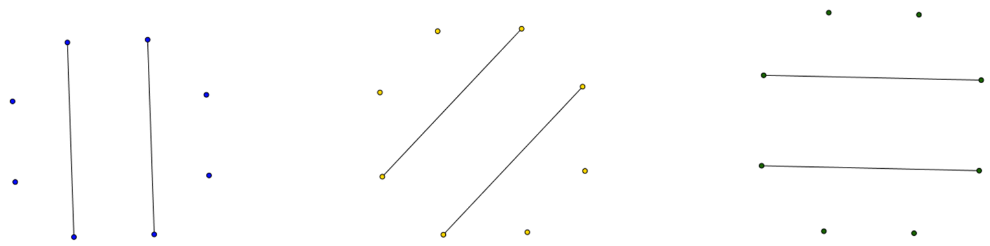


Image 3 : parallèles dans l'octogone régulier

Selon moi, la deuxième activité a été plus investie par les élèves. Ils devaient trouver 6 quadrilatères différents en reliant les sommets d'un octogone régulier. Je note que les élèves ont presque tous trouvé les « mêmes » quadrilatères, en proposant : rectangle, carré, plusieurs trapèzes, cerf-volant et quelconque. Il faut également relever que les élèves ne connaissaient pas le nom de toutes les formes découvertes, notamment le trapèze, le cerf-volant et le quadrilatère quelconque.

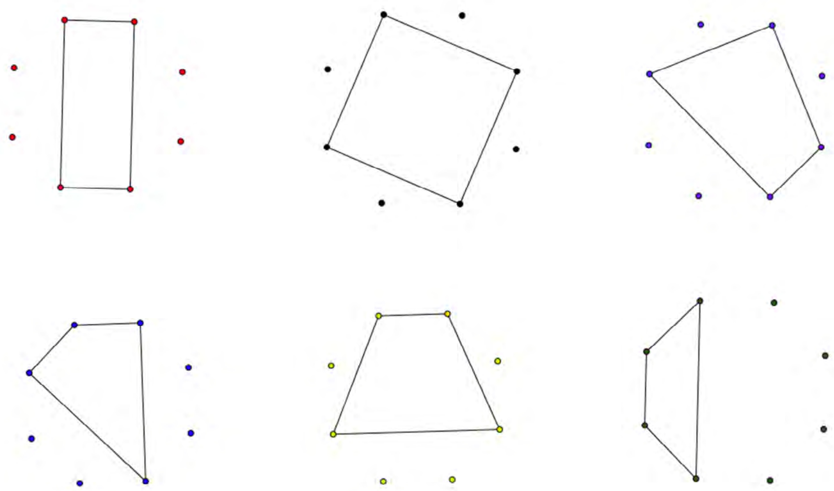


Image 4 : exemple type de 6 quadrilatères trouvés

La dernière activité de cette période a permis un retour sur papier en mettant en commun les deux premières activités. Les élèves devaient reproduire leurs productions sur papier, marquer les angles droits et trouver, si possible, une paire de côtés parallèles. Voici le résultat final de ce qui a été conservé in fine dans le cahier de l'élève :

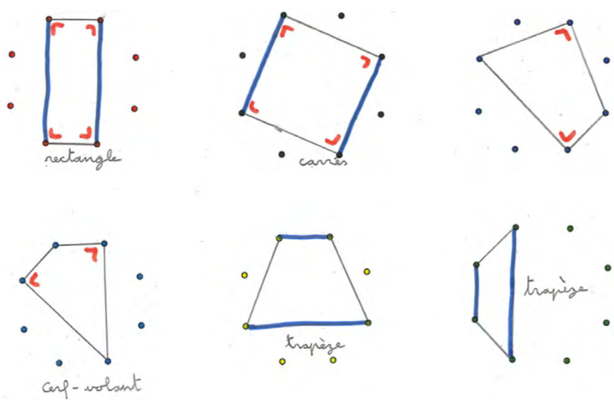


Image 5 : Trace écrite 1ère partie

Pour arriver à ce résultat, j'ai été surpris par des difficultés liées à la notion de parallèles, qui semblait être pourtant bien maîtrisée par les élèves avec GeoGebra. Dans un premier temps, une partie des élèves n'a pas mis en évidence des parallèles, mais plutôt des côtés isométriques. Il y avait une mauvaise compréhension de ce terme, pour eux « parallèle » signifiait principalement isométrique et non « qui ne se croise pas ». Partant de ces observations, j'ai dû prendre plusieurs minutes en plus pour clarifier la notion de parallélisme et arriver au résultat de l'image 5.

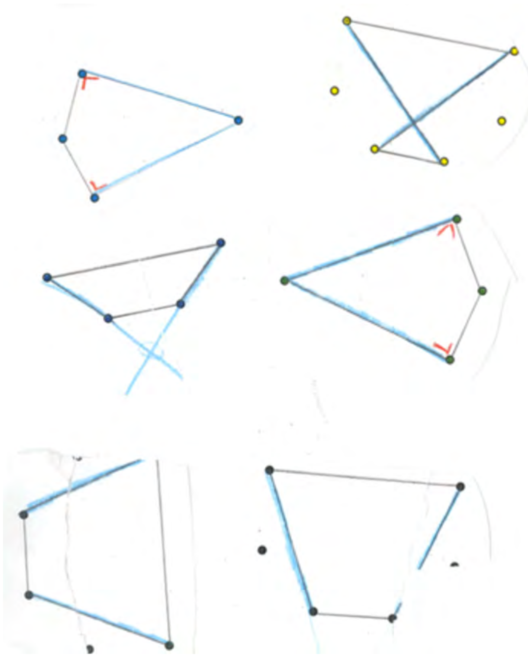


Image 6 : Erreurs sur le parallélisme (en bleu)

Pour terminer cette première partie, il m'a fallu plus de temps que prévu, 2 périodes à la place d'une seule. Par contre, mes élèves étaient impliqués et intéressés. J'ai constaté que de faire la géométrie avec GeoGebra n'est pas suffisant pour faire acquérir des notions aux élèves. Le retour sur papier révélait une notion mal comprise, la transposition entre l'outil informatique et le papier-crayon n'était ni facile ni automatique.

La deuxième partie de cette séquence proposait de débuter par un exercice qui ressemblait au précédent. Les élèves ont dû trouver 4 quadrilatères imposés (un carré, un rectangle, un parallélogramme et un losange) en reliant des sommets de l'octogone régulier. Des questions sont survenues immédiatement pour savoir ce que sont un parallélogramme et un losange. La classe a répondu et trouvé une représentation de ces deux quadrilatères en se basant sur le carré et le rectangle et en proposant de les « tirer » pour ne plus avoir d'angles droits. Les élèves se sont ensuite mis à chercher.

Tous les élèves ont su retrouver très vite le carré et le rectangle. Cela les a mis en confiance pour chercher les deux suivants. Pour réussir à trouver le parallélogramme et le losange, il a fallu que je montre au TBI comment utiliser les outils « Parallèle » et « Distance ou Longueur » de GeoGebra, pour construire, vérifier ou valider une production.

Tous les élèves ont trouvé les 4 formes demandées, certains seuls, d'autres avec de l'aide de leur camarade. Divers parallélogrammes et losanges sont apparus, et souvent d'une manière imprévue à mon analyse préalable et même plus simple. Sur l'image 7 on peut observer un losange « simple » qu'un élève a trouvé. L'image 8 présente un parallélogramme que je n'avais pas prévu.

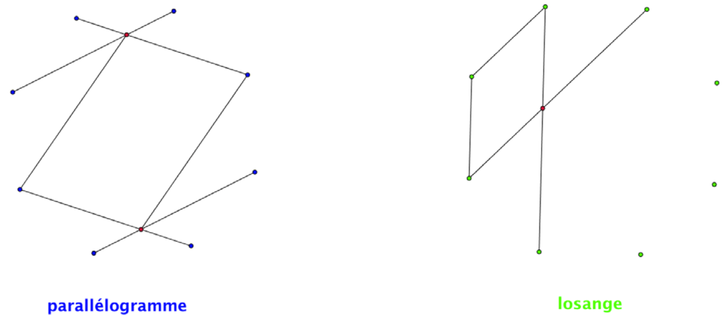


Image 7 : exemples de parallélogramme et de losange

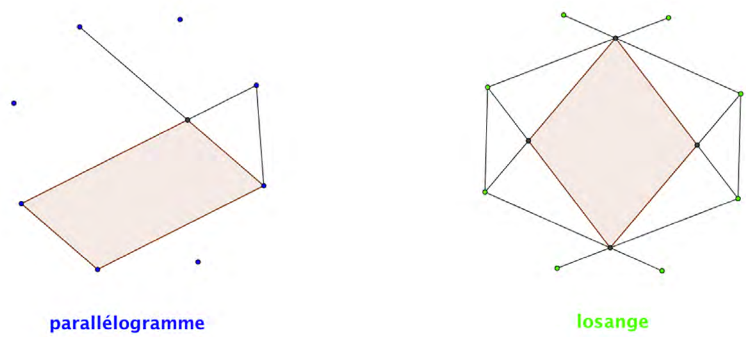


Image 8 : autres exemples de parallélogramme et de losange

L’activité suivante s’est faite par groupes d’au moins deux élèves. Ils ont dû tracer les diagonales des 4 quadrilatères, puis utiliser les outils de GeoGebra « Perpendiculaire » et « Distance ou Longueur » pour essayer de trouver des propriétés des diagonales entre des différents types de quadrilatères. Cette activité a pu se faire directement à partir de leur fichier précédent (S2T1.ggb). J’aurais pu proposer un fichier avec un exemple de parallélogramme et de losange pour les élèves n’ayant pas réussi l’activité précédente (S2T2.ggb).

La mise en commun de ces deux activités s’est faite devant le TBI et avec le fichier MEC2.doc. Les élèves avaient devant eux un tableau à double entrée (une entrée avec la perpendicularité ou non des diagonales et l’autre avec l’isométrie ou non de ces mêmes diagonales) et les 4 quadrilatères imposés à placer dedans. A tour de rôle, un élève est venu déplacer au TBI un des quadrilatères et le placer dans le tableau, puis il y eut débat pour savoir si la proposition était exacte ou s’il fallait changer l’emplacement du quadrilatère. Après avoir discuté ainsi des 4 figures, les élèves ont trouvé un résultat commun et correct. J’ai imprimé ce tableau pour tous mes élèves et ils l’ont collé dans leur cahier en guise d’institutionnalisation.

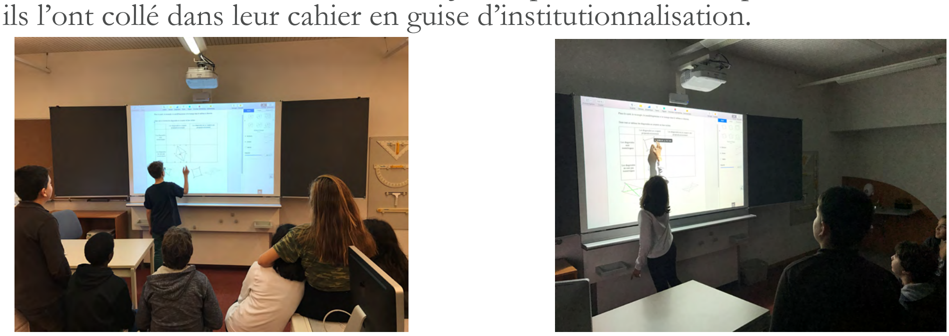


Image 9 : mise en commun au TBI

Et voici ce que les élèves garderont dans leur cahier:

Dans tout ce tableau les diagonales se coupent en leur milieu.

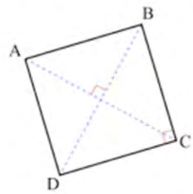
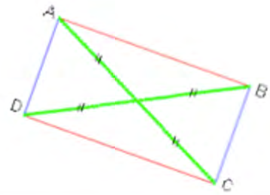
	Les diagonales se coupent perpendiculairement	**Les diagonales ne se coupent pas perpendiculairement**
Les diagonales sont isométriques		
Les diagonales ne sont pas isométriques		

Image 10 : Institutionnalisation finale

Cette deuxième partie de séquence était riche en recherche et a permis de clôturer cette micro-séquence avec un document créé par les élèves et pouvant faire référence plus tard en classe. Parler des quadrilatères en utilisant les diagonales est une façon peu habituelle de voir ce thème. Les élèves ont été déstabilisés, même sur les figures qu'ils croyaient bien connaître (comme le carré et le rectangle), ils ont dû avoir une réflexion pour pouvoir répondre aux questions de la deuxième mise en commun. Certains de mes élèves sont dyslexiques et ont d'énormes difficultés à écrire. Ces deux parties présentées leur ont permis d'être au même niveau que les autres camarades et ils n'ont pas eu besoin de perdre de l'énergie sur l'écriture et ont pu se concentrer uniquement sur l'activité.

Cette deuxième partie devait prendre une période, mais dura au final un peu plus, car le travail des propriétés des diagonales a été lent car déstabilisant et non usuel. La variété des dispositifs sociaux a aussi été un atout, les élèves ont travaillé seuls, puis en groupes de 2 et au final tous ensemble. Les jeunes n'ont pas eu le temps de s'ennuyer, et même si certaines activités se ressemblaient, le dispositif social différent faisait qu'une nouvelle dynamique s'installait entre deux tâches. J'ai eu l'impression d'une certaine logique temporelle entre toutes les activités. Le fait de commencer par les notions compliquées de parallèles et perpendiculaires m'a permis de m'assurer d'une certaine homogénéité de leur compréhension au sein de la classe, ce qui m'a permis la mise en place finale de la deuxième mise en commun.

Travailler la perpendicularité et le parallélisme sur les côtés des quadrilatères est courant, mais transposer ces notions sur les diagonales a forcé les élèves à avoir un autre point de vue sur ces notions et à ne pas « bloquer » ces notions sur les côtés des quadrilatères.

La troisième partie de la séquence a travaillé la créativité des élèves. Chaque jeune devait créer une forme de son choix, toujours à partir des sommets d'un octogone régulier. Pour cette tâche, les élèves ont eu l'occasion d'utiliser plus d'outils de GeoGebra (cercle, polygone et milieu). Quand un jeune avait terminé le dessin, il demandait à un de ses camarades de le reproduire. La reproduction terminée, elle était « notée » et commentée par son auteur. Chaque jeune a produit une figure et en a aussi reproduit une autre.

La motivation de mes élèves était importante car ils voulaient créer un modèle suffisamment résistant. J'ai même dû dire de simplifier certaines productions, mais le challenge qu'ils se sont lancés était motivateur, à la fois pour le créateur et pour le reproducteur. Le reproducteur pouvait demander un indice au créateur, en cas de complexité excessive. Voici quelques modèles et reproductions :

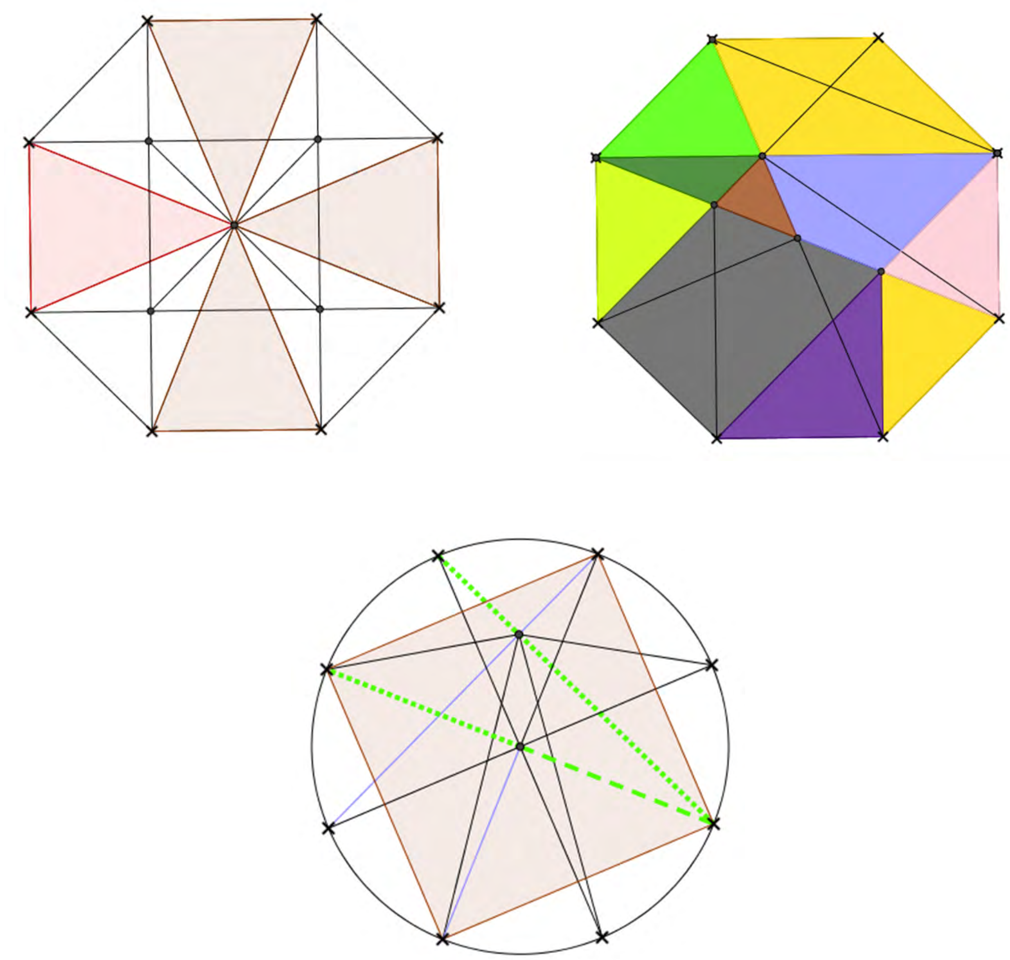


Image 11 : Exemples de modèles avec ou sans leur reproduction

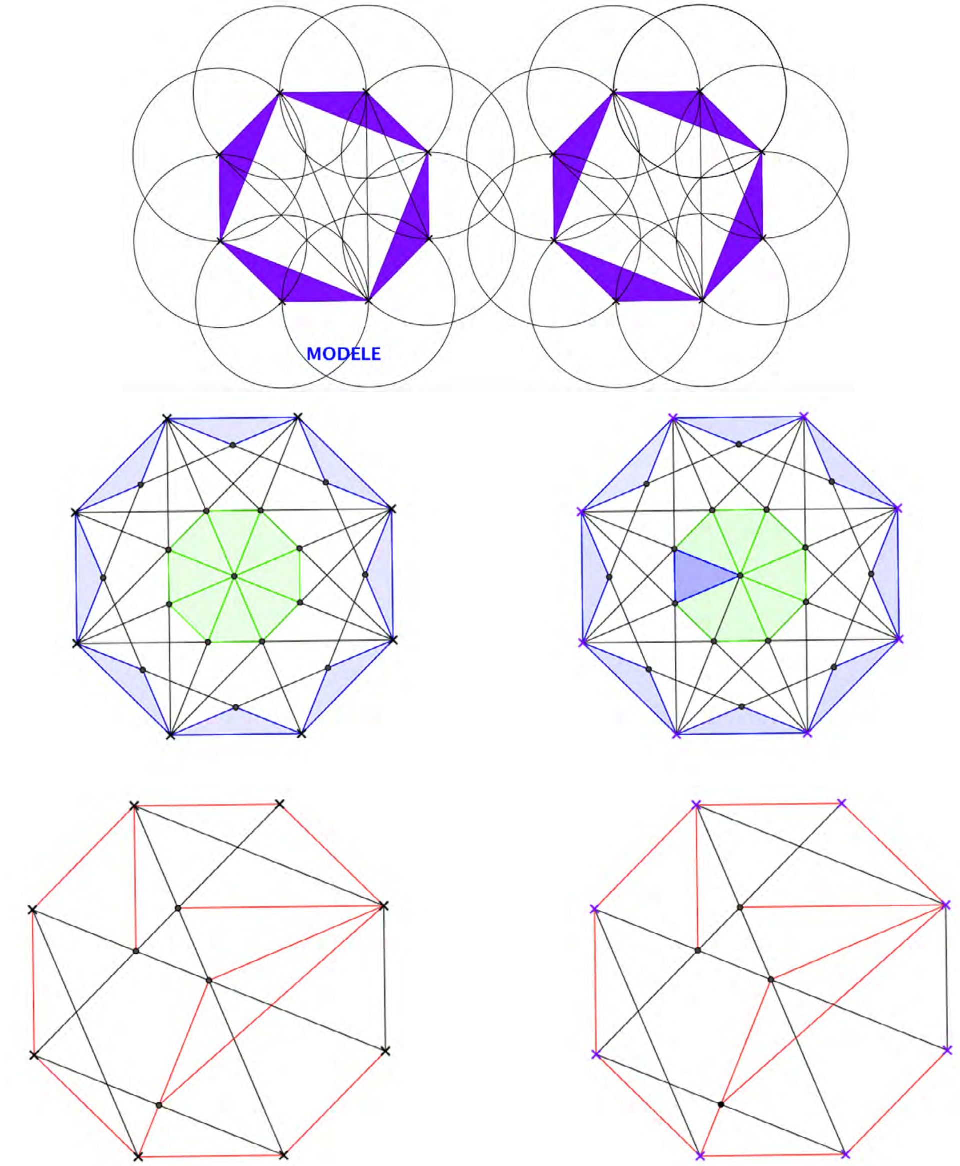


Image 12 : Exemples de modèles avec ou sans leur reproduction

Cette dernière tâche est moins liée aux concepts mathématiques, mais était indispensable car elle a permis aux élèves de se « lâcher », de rendre les mathématiques créatives. Ce côté ludico-créatif a permis des échanges entre pairs plus libres, plus détendus ce qui n'est pas négligeable, surtout pour les élèves ayant une appréhension à propos des mathématiques.

Références

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP) (2010). P*lan d'étude Romand, Mathématiques et Science de la nature. – Sciences humaines et sociales,* CIIP.

Dias, T. (2016). Labo-maths-Expérience octogonale avec GeoGebra. *Math-Ecole, 226,* 51-54.

Comparaison de l'enseignement de la géométrie en contextes d'enseignement obligatoire spécialisé et de formation professionnelle : étude de cas de trois structures

Michaela Chlostova

Mémoire de master, Université de Genève

Sur la base d'un corpus d'études, nationales et internationales, Pelgrims (2009) met en évidence différentes contingences particulières avec lesquelles les enseignants doivent composer leur enseignement et qui infléchissent leurs pratiques : liberté de programme (bien qu'ils puissent se référer au Plan d'Etude Romand (PER)); liberté de moyens d'enseignement, les enseignants pouvant se référer aux Moyens d'Enseignement Romand (MER) tout en créant eux-mêmes des documents ; et liberté de rendement, aucun référentiel ni évaluation ne contraignant des décisions de promotion, bien que des évaluations diagnostiques et formatives puissent être utilisées.

Il existerait également certaines contraintes de fonctionnement, liées aux comportements réactionnels des élèves, menant à privilégier l'enseignement de certains objets de savoirs au détriment d'autres (Pelgrims, 2009). En mathématiques, cela se traduirait par un surinvestissement des connaissances numériques, comme les quatre opérations, au détriment d'autres champs mathématiques, dont la géométrie (Conne, 2003).

En 1995, l'étude de Pelgrims a révélé l'absence, sur une période de trois mois, d'enseignement de la géométrie en contexte de classes spécialisées romandes. Plus récente, celle de Cange (2005) en institution spécialisée, montre une prédominance de l'utilisation des instruments géométriques usuels, comme la règle, l'équerre et le compas.

Le choix des objets d'enseignement dépendrait aussi, en enseignement spécialisé, des débouchés professionnels présupposés par les enseignants, et des représentations de ces derniers sur ce qui sera utile aux élèves dans leur pratique professionnelle future. La recherche de Favre (2015), menée en contexte de formation professionnelle spécialisée romande, montre en effet que les enseignants choisiraient les objets d'enseignement en mathématiques selon le degré d'utilité qu'ils leur accordent pour une formation professionnelle future. Par contre, nous ignorons si les débouchés professionnels influent sur le choix des objets d'enseignement en géométrie.

Cet article contribue donc à l'étude de la place de la géométrie[1] dans différents contextes d'enseignement spécialisé.

La géométrie et les mathématiques en contexte de formation professionnelle

En contexte de formation professionnelle romande, la recherche de Favre (2015) montre une sorte de précarité, une disparité ainsi qu'une immobilité de l'enseignement des connaissances mathématiques. Ces constats confirment

1 Dans cet article le terme « géométrie » est utilisé, car c'est celui qui a été employé avec les enseignants participants à la recherche bien que le terme officiel figurant dans le PER est « Espace ».

les résultats régulièrement observés en enseignement spécialisé, les séquences d'enseignement en mathématiques paraissant morcelées et les savoirs peu institutionnalisés, affectant la progression (Pelgrims, 2009). En ce qui concerne précisément la géométrie, Bessot (2009) met en évidence la prédominance de la mesure et de la représentation d'objets dans l'espace, en formation professionnelle, filière construction. Dans l'idée de les contextualiser, l'utilisation des théorèmes et axiomes serait simplifiée donnant lieu à des « théorèmes en actes », tel que la règle de 3-4-5 simplifiant le théorème de Pythagore. Par ailleurs, en contexte suisse, des résultats de recherches révèlent peu de correspondance entre les objets enseignés en formation professionnelle et les savoirs requis par les différentes professions (Favre, 2015 ; Kaiser, 2014).

La géométrie axiomatique et la géométrie praxéologique

A partir d'un ensemble de travaux sur la géométrie en tant qu'objet d'enseignement, notre recherche propose une distinction de deux types de géométrie : la géométrie axiomatique et la géométrie praxéologique (Chlostova, 2016).

Selon cette recherche, la géométrie axiomatique étudie de manière prépondérante les objets géométriques, c'est-à-dire des figures conceptuelles, au moyen d'un raisonnement hypothético-déductif basé sur les propriétés. La géométrie axiomatique est surtout valorisée dans l'enseignement primaire et gymnasial ordinaire.

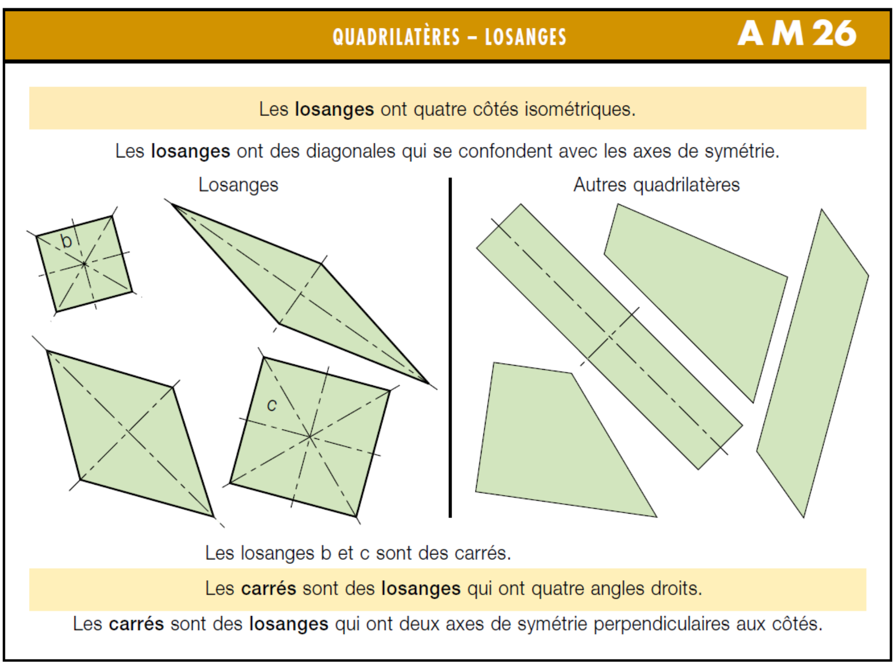


Figure 1 : Aide-mémoire pour la 7H issu des Moyens Corome (Chastellain & Jaquet, 2001) traitant des propriétés des losanges, relevant de la géométrie axiomatique.

Quant à la géométrie praxéologique, elle étudie de manière prépondérante les objets matériels, avec une prédominance de la mesure, sur la base d'une reconnaissance perceptive des figures. Nous la qualifions de praxéologique de par le fait qu'elle est plutôt valorisée dans la formation professionnelle (du moins ordinaire), en raison des représentations des enseignants en leur pertinence pour la pratique professionnelle future.

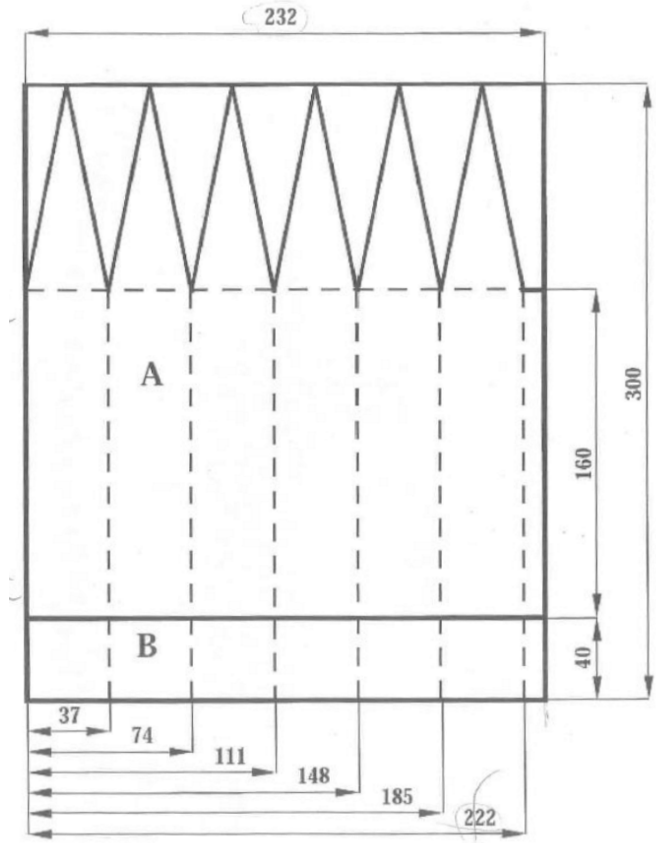


Figure 2 : Patron pour la construction d'un objet en métal, rencontré en contexte d'atelier de l'Ecole de Formation Préprofessionnelle étudiée, relevant de la géométrie praxéologique

Ainsi, notre recherche soulève la question suivante : Quel type de géométrie (praxéologique ou axiomatique) est dispensé dans différents contextes d'enseignement spécialisé ? Afin de répondre à cette question, il s'agira de déterminer : quelles sont les ressources utilisées pour l'enseignement de la géométrie, quelles sont les tâches mises en place, quels sont les aspects de la géométrie (comme le lexique spécifique, la précision du tracé et de la mesure) considérés comme importants par les enseignants/formateurs ?

Méthodologie de recherche

Notre étude est réalisée dans trois contextes d'enseignement et de formation spécialisés, se situant à trois niveaux différents de formation : primaire, préprofessionnelle (secondaire 1) et professionnelle (secondaire 2).

Au niveau primaire, il s'agit d'une classe spécialisée d'une école primaire ordinaire. Cette classe accueille des élèves âgés de 7 à 13 ans issus de classes ordinaires ou de centres médico-pédagogiques (CMP). Comme orientation, un pourcentage important des élèves rejoint l'enseignement ordinaire au Cycle d'orientation (secondaire 1). Les autres élèves poursuivent une scolarité en enseignement spécialisé dans une Ecole de formation préprofessionnelle.

Pour la formation préprofessionnelle spécialisée, les données sont recueillies dans une classe et dans un atelier « métal » de l'Ecole de formation préprofessionnelle (EFP). Celle-ci accueille des adolescents, âgés de 13 à 15 ans provenant soit de l'enseignement spécialisé (institutions, regroupements de classes spécialisées), soit de l'enseignement ordinaire. Leur orientation peut tout aussi bien être une intégration dans l'enseignement ordinaire (classe intégrée au Cycle d'orientation), la poursuite d'un parcours en enseignement spécialisé dans des structures préprofessionnelles, tels que le Centre Educatif de Formation Initiale (CEFI), dans des ateliers préprofessionnels (comme les ateliers de la Fondation Officielle de la Jeunesse), qu'un apprentissage en formation professionnelle ordinaire ou spécialisée.

Enfin, pour la formation professionnelle spécialisée, il s'agit d'une classe d'appui dans un centre de formation professionnelle relevant de l'enseignement spécialisé. Celle-là accueille des apprentis à partir de 15 ans, qui peuvent ensuite entrer dans le milieu professionnel. Les filières enseignées sont la construction, le paysagisme, l'horticulture, la cuisine, par exemple.

La démarche de recherche reste qualitative et les données sont recueillies à l'aide de trois outils : un entretien semi-dirigé avec un enseignant/formateur d'après un canevas élaboré au préalable, des traces d'enseignement-apprentissage en géométrie (moyens d'enseignement, fiches, manuels et autre matériel), ainsi qu'une observation non participative en classe ou en atelier dans chacune de ces structures.

Parmi l'ensemble des enseignants contactés, seuls ceux mentionnant enseigner la géométrie ont été retenus pour cette étude.

Présentation des résultats

Pour la classe spécialisée, les résultats montrent que les enseignants désignent des objectifs en se référant au plan d'études romand (PER) et utilisent des moyens d'enseignement romands. Comme tâches et savoirs exercés, on relève, d'après l'entretien avec l'enseignant spécialisé, des tâches autour des propriétés théoriques des figures, de la mesure, ainsi qu'une activité de fabrication d'un labyrinthe à billes. Le lexique et les conventions d'écriture correspondent à ceux en vigueur dans l'enseignement ordinaire.

Pour l'Ecole de Formation Préprofessionnelle, les résultats diffèrent entre la classe et l'atelier. Dans les deux contextes, selon les enseignants, les objectifs sont différenciés en fonction des besoins des élèves. A l'atelier les objectifs sont liés à des usages professionnels. En classe, bien que l'enseignante relève ne pas proposer les moyens officiels d'enseignement et souvent créer ses propres fiches, ces dernières ressemblent aux moyens d'enseignement romands. A l'atelier, mis à part les instruments de géométrie usuels, ce sont surtout les outils propres à la fabrication d'objets en métal et des patrons développés en classe qui sont utilisés. Les enseignants rapportent souhaiter que les élèves utilisent les connaissances apprises en classe à l'atelier et inversement. Dans les deux contextes, la mesure prend une place importante, tant dans des activités de mesure d'aires et de périmètres, que dans le dessin technique à l'atelier. Le lexique employé se veut au plus proche des termes utilisés dans le milieu professionnel. La précision du tracé et de la mesure est jugée primordiale à l'atelier.

Enfin, au Centre de formation professionnelle, les objectifs sont également individualisés, tout en étant contextualisés dans la pratique. Les apprentis peuvent se rendre à l'appui correspondant à leur filière en cas de difficultés rencontrées dans l'atelier. Les notions sont alors reprises, avec des outils très divers, incluant des moyens d'enseignement romands, des moyens édités pour la formation professionnelle, ainsi que des outils propres aux différentes filières (par exemple, une chevillière et une règle à niveau à bulle pour le calcul de la pente). Les activités proposées sont des problèmes professionnels spécifiques à chaque filière, des activités de mesure, le dessin technique pour la construction. Les propriétés théoriques des figures sont également abordées.

Une enseignante déclare que les théorèmes, s'ils sont enseignés, sont simplifiés pour correspondre au mieux à la problématique professionnelle. Le lexique est spécifique aux différentes filières. La précision du tracé et de la mesure est jugée essentielle par les enseignants.

Discussion et conclusion

Au regard de ces résultats issus des données d'entretien, des traces diverses, ainsi que des observations complémentaires, nous pouvons premièrement conclure à une prédominance des tâches de géométrie axiomatique en classe spécialisée et en classe à l'Ecole de Formation Préprofessionnelle, et à une prédominance des tâches de géométrie praxéologique à l'atelier de l'EFP et au Centre de formation professionnelle.

Deuxièmement, en accord avec les résultats de Conne (2003), la géométrie est jugée, et ceci par l'ensemble des acteurs interviewés, secondaire à d'autres notions mathématiques, notamment la numération.Troisièmement, on rencontre une grande diversité à la fois des finalités, des objectifs et des moyens d'enseignement de la géométrie. Celle-là peut être mise en lien avec les libertés et contraintes infléchissant les pratiques d'enseignement spécialisé (Pelgrims, 2009). En effet, nous constatons qu'ayant une liberté relative quant aux objectifs, savoirs et moyens d'enseignement, les enseignants orientent leurs choix selon ce qu'ils considèrent important à acquérir par leurs élèves : ne pas enseigner la géométrie, enseigner des notions au plus proche de l'enseignement ordinaire ou alors jugées comme des présupposés à atteindre en vue d'une formation professionnelle future. Ainsi, ces choix pré-conditionnent les savoirs dont disposeront ou non les élèves, contribuant à renforcer la personnalisation et le manque d'institutionnalisation des acquis en enseignement spécialisé.

Quatrièmement, les résultats mettent en évidence une prépondérance d'activités de mesure considérées comme activités de géométrie par les enseignants dans les trois contextes. En effet, les nombreuses tâches de calcul d'aire et de périmètre observées ne relèvent pas du domaine de la géométrie dans le PER, mais du domaine « grandeurs et mesures ».

Finalement, même dans les contextes considérés comme spécifiques à la géométrie praxéologique, nous remarquons que des connaissances théoriques, notamment en lien avec les propriétés des figures et avec l'emploi de théorèmes et d'axiomes, même simplifiés, sont abordées. Ceci nous amène à conclure à une certaine complémentarité entre connaissances théoriques et procédés praxéologiques, ces derniers contribuant à contextualiser les connaissances théoriques. Celles-ci posent un cadre facilitant la compréhension, l'institutionnalisation et la généralisation des procédés. Des études sont bien évidemment à répliquer dans des structures et des contextes différents pour nous permettre de mieux saisir l'enseignement de la géométrie à des élèves à besoins éducatifs particuliers.

Références

Bessot, A. (2009). Geometry at work: examples from the building industry. In A. Bessot & Ridgway (Ed.), *Education for Mathematics in the Workplace* (pp. 143-157). Dordrecht: Kluwer Academic.

Cange, C. (2005). L'enseignement spécialisé en Suisse Romande, l'exemple d'une institution vaudoise. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Ed.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques année 2003* (pp. 101-108). Paris : RDM IREM.

Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001). *Mathématiques Cinquième année : Livre de l'élève.* Granges-Paccot : Office romand des éditions du matériel scolaire.

Chlostova, M. (2016). *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en contextes d'enseignement obligatoire spécialisé, préprofessionnel spécialisé et professionnel.* Mémoire de Master universitaire en enseignement spécialisé, Université de Genève.

Conne, F. (2003). Interaction de connaissances et investissement de savoirs dans l'enseignement mathématique en institutions et classes spécialisées. *Education et francophonie, 31*(2), 82-102.

Duval, R. & Godin, M. (2006). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Favre, J.-M. (2015). *Investissements de savoirs et interactions de connaissances dans un centre de formation professionnelle et sociale : une contribution à l'étude des mathématiques et de leur fonctionnement dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée.* Thèse de doctorat en Sciences de l'éducation, Université de Genève.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1998). Réflexions sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres. *Grand N, 64*, 65-78.

Kaiser, H. (2013). How to find out what kind of numeracy is required for a certain workplace? Three case studies. *3rd congress on Research in Vocational Education and Training of the Swiss Federal Institute for Vocational Education and Training (SFIVET).* Zollikofen/ Switzerland.

Pelgrims, G. (2009). Contraintes et libertés d'action en classe spécialisée : leurs traces dans la motivation des élèves à apprendre des mathématiques. *Formation et pratiques d'enseignement en questions, 9*, 135-158.

Pelgrims, G. (2001). Comparaison des processus d'enseignement et conditions d'apprentissage en classes ordinaire et spécialisée: des prévisions aux contraintes. *Revue française de pédagogie, 134*(1), 147-165.

Pelgrims, G. (1995). *Observation des activités d'enseignement dans différentes classes spéciales du niveau primaire des cantons de Fribourg, Genève et Valais.* Mémoire de Certificat d'études avancées (3e cycle) en Sciences de l'éducation, Université de Genève.

RMé pour celles et ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.revue-mathematiques.ch, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 1 depuis la rubrique *Consultation*.

Contact : revue.mathematiques@gmail.com

Site internet :

www.revue-mathematiques.ch