

RMé 237

237

RMé

REVUE DE MATHÉMATIQUES
POUR L'ÉCOLE

AVRIL 2022

ISSN : 2571-516X

APPROCHE DE LA PROPORTIONNALITÉ A L'ÉCOLE PRIMAIRE : COMPARAISON DES SECTIONS FRANCOPHONE ET ALÉMANIQUE	3
Yves Schubnel, Chrystel Schwab-Freiburghaus.....	3
UNE DÉMARCHE ALGÈBRIQUE SURPRENANTE.....	15
Sylvain Vermette, Mathieu Séguin.....	15
JEUX VIDÉO ACTIFS, MATHÉMATIQUES ET ÉDUCATION PHYSIQUE : LE CAS DE LA PLATEFORME PLAY LÜ	21
Patrick Fargier, Valerian Cécé, Guillaume Girod, Nicolas Burel, Jimmy Serment, Cédric Roure, Vanessa Lentillon-Kaestner	21
DÉCONCERTANT HASARD	32
Michel Brêchet	32

APPROCHE DE LA PROPORTIONNALITÉ A L'ÉCOLE PRIMAIRE : COMPARAISON DES SECTIONS FRANCOPHONE ET ALÉMANIQUE

Yves Schubnel, Chrystel Schwab-Freiburghaus

Haute École Pédagogique du canton de Fribourg - Unité de recherche EADS

Mots-clés : proportionnalité, propriétés de linéarité, plans d'études, moyens d'enseignement

Résumé : La proportionnalité est une notion qui est introduite à l'école primaire et son étude se poursuit au cours du secondaire 1. Cet article se réfère aux plans d'études en vigueur à l'école primaire en Suisse romande et en Suisse alémanique et les compare quant à l'approche de cette notion, avec un focus particulier sur les propriétés de linéarité. Nous comparerons également leur mise en œuvre dans les moyens d'enseignement des différents degrés du cycle 2 de l'école primaire des deux régions linguistiques.

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'unité de recherche Enseignement et apprentissage des sciences (EADS) de la Haute École pédagogique de Fribourg, nous avons choisi de conduire une réflexion sur l'approche de la proportionnalité, car il s'agit d'une notion dont l'acquisition par de jeunes élèves n'est pas toujours évidente. En effet, comme l'écrit Gille (2008, p. 11) à propos des élèves entrant en seconde – qui est le premier degré du secondaire 2 en France –, « force est de constater que la notion même de proportionnalité n'est pas réellement installée dans l'esprit de la plupart », et ce malgré sa présence constante dans les programmes scolaires (Simard, 2012b) et la résolution de problèmes variés comprenant en particulier les questions d'échelle au secondaire 1 (Weiss, 2012). Nous nous sommes donc intéressé·e·s à la manière dont la proportionnalité est abordée dans les classes du cycle 2 de l'école primaire. De plus, à l'heure où l'enseignement bilingue se développe en Suisse, il nous a semblé opportun et utile d'étudier les directives institutionnelles et les recommandations pour l'école en Suisse romande et en Suisse alémanique, en analysant et en comparant les contextes se rapportant à cette notion dans les plans d'études et les moyens d'enseignement des deux régions linguistiques.

À titre de prolongement, une séquence d'enseignement sur la thématique de la proportionnalité et des propriétés de linéarité a été conçue et mise en œuvre dans une classe francophone de 6H et une autre séquence portant sur la même thématique l'a été dans une classe germanophone de même degré. Il est prévu que cette expérimentation fasse l'objet d'une prochaine publication.

CADRE THÉORIQUE : LA PROPORTIONNALITÉ

Point de vue mathématique

Nous choisissons de définir une situation de proportionnalité à partir de deux suites numériques finies ayant le même nombre de termes. Deux suites de nombres réels sont dites proportionnelles si on peut passer de chaque terme de la première suite au terme correspondant de la seconde par un même opérateur multiplicatif appelé coefficient de proportionnalité.

Dans ces conditions, on voit qu'il existe une fonction linéaire qui relie les termes de la première suite à ceux de la seconde, à savoir la fonction f définie par $f(x) = a x$, dans laquelle a désigne le coefficient de proportionnalité. Réciproquement, la donnée d'une fonction linéaire permet la construction de deux suites proportionnelles.

Nous disposons ainsi de deux manières équivalentes de définir deux suites proportionnelles.

On montre facilement que toute fonction linéaire vérifie la propriété additive de linéarité : « pour tous nombres réels x et y , $f(x + y) = f(x) + f(y)$ » et la propriété multiplicative de linéarité : « pour tous nombres réels a et x , $f(a x) = a f(x)$ ».

Il est intéressant de noter que si f est continue, chacune des deux propriétés de linéarité est une propriété caractéristique des fonctions linéaires (Simard, 2012a).

La proportionnalité à l'école primaire

L'enseignement de la proportionnalité concerne le domaine multiplicatif. Il s'inscrit sur le long terme, débute au cycle 2 et est approfondi au cycle 3. D'après Charnay et Mante (2014, p. 293), les compétences à développer concernent principalement la résolution de problèmes, avec deux objectifs :

1. Reconnaître si une situation peut être mathématisée au moyen de la proportionnalité,
2. Mettre en œuvre un mode de résolution adapté, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des données en jeu.

Nous nous intéressons ici plus particulièrement au second objectif.

Une situation de proportionnalité peut être représentée par deux suites finies de nombres notés sur deux lignes ou deux colonnes d'un tableau, les nombres désignant en général des mesures de grandeurs ; les nombres d'une ligne (ou d'une colonne) sont obtenus à partir des nombres de l'autre ligne (ou de l'autre colonne) par multiplication par un même nombre. Les problèmes que nous considérons ici relèvent du calcul d'une quatrième proportionnelle.

Exemple : 2 petits pains coûtent 5 fr. Combien coûtent 14 petits pains ?

Nombre de petits pains	2	14
Prix en fr.	5	?

Nous avons affaire à une situation de proportionnalité, puisque les nombres de la seconde ligne sont obtenus en multipliant ceux de la première ligne par le même nombre : le prix d'un petit pain.

Si dans l'enseignement obligatoire en France de nombreuses procédures de résolution ont été développées au fil du temps, dont la règle de trois¹ (Hersant, 2005), Charnay et Mante (2014) en préconisent trois types à enseigner à l'école primaire, qu'on retrouve dans les moyens d'enseignement – anciens et nouveaux – de Suisse romande :

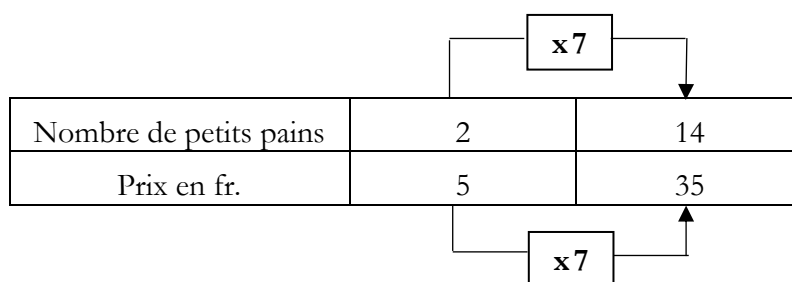
1. Procédures basées sur les propriétés de linéarité
 - a. Propriété multiplicative de la linéarité (ou propriété du produit) pour le calcul du prix de 14 petits pains

Le quotient de 14 par 2 est 7, donc le prix de 14 petits pains est 5×7 fr. = 35 fr.

Nombre de petits pains	2	14 (= 2 x 7)
Prix en fr.	5	5 x 7 = 35

Cette propriété peut être représentée à l'aide de flèches comme le montre la figure ci-contre :

¹ La règle de trois, qui est une expression contextualisée de la technique du produit en croix (Simard, 2012a), ne sera pas développée dans cet article, conformément aux préconisations des moyens romands.

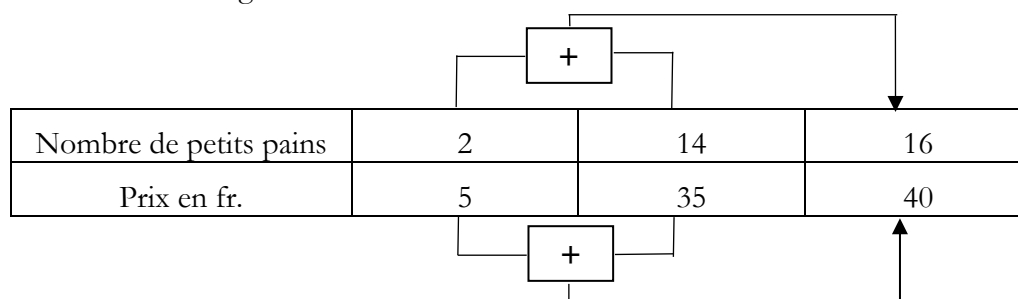


b. Propriété additive de la linéarité (ou propriété de la somme) pour le calcul du prix de 16 petits pains

Sachant que 2 petits pains coûtent 5 fr. et que 14 petits pains coûtent 35 fr. :

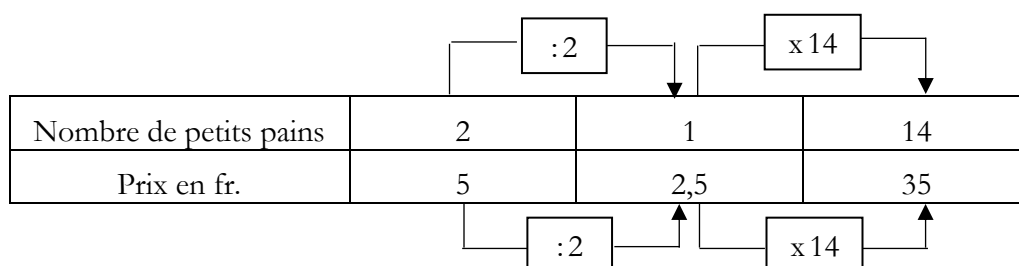
Nombre de petits pains	2	14	16 (= 2 + 14)
Prix en fr.	5	35	5 + 35 = 40

On en déduit que 16 petits pains coûtent 40 fr. Cette propriété peut également être représentée à l'aide de flèches comme le montre la figure suivante :



2. Procédure basée sur le passage par la valeur unitaire

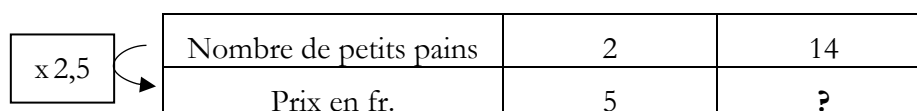
Cette procédure s'appuie sur la propriété du produit. On calcule d'abord le prix d'un petit pain puis celui de 14 petits pains :



Le prix d'un petit pain est donc de 2 fr. 50 c. et celui de 14 petits pains de 35 fr.

3. Procédure basée sur le coefficient (ou facteur) de proportionnalité

C'est le coefficient qui permet de passer de la grandeur « Nombre de petits pains » à la grandeur « Prix en fr. ». Ce coefficient s'obtient en divisant le prix par le nombre de petits pains : 5 divisé par 2 est égal à 2,5.



En calculant $14 \times 2,5 = 35$, on trouve le prix de 14 petits pains : 35 fr.

À propos de deux différentes procédures

Nous nous intéressons ici à deux manières différentes de résoudre les problèmes de proportionnalité : à celle relevant de la propriété du produit et à celle utilisant le coefficient de proportionnalité. Dans sa recherche intitulée « Les premières acquisitions de la fonction linéaire », Ricco (1978) a indiqué que l'emploi de l'opérateur fonction (coefficient de proportionnalité) était antérieur à celui de l'opérateur scalaire (propriété du produit) chez les élèves du primaire et que ce dernier n'était employé que plus tardivement (chez les élèves les plus âgés, c'est-à-dire 9-11 ans). De plus, d'après Vergnaud (1979), les élèves du collège [secondaire 1 en Suisse] préféraient plutôt utiliser la procédure de type scalaire, même dans les situations où elle était d'un emploi plus difficile. D'après Sokona (1989, p. 6), « ce résultat [...] correspondrait à une évolution des procédures (de l'analytique vers l'analogique) au sein du primaire même (des plus jeunes aux plus âgés) et du primaire au collège. »

Si on se réfère maintenant aux plans d'études de Suisse francophone et de Suisse alémanique, on note qu'aucun d'eux ne précise explicitement le type de procédure à favoriser chez les élèves. En revanche, les moyens d'enseignement en vigueur dans les deux régions linguistiques proposent tous deux entre la 6H et la 8H des situations mettant en œuvre les différents types de procédures, opérant ainsi en quelque sorte une synthèse des résultats de Ricco (1978) et Vergnaud (1979). Une étude détaillée est proposée dans l'analyse qui suit.

ANALYSE

Le critère utilisé pour réaliser cette analyse est le type de procédures visées, mentionnées éventuellement dans les plans d'études et/ou préconisées par les livres du maître. On envisage l'utilisation des propriétés de linéarité, le passage par la valeur unitaire et l'utilisation du coefficient de proportionnalité.

Comparaison de la proportionnalité dans les plans d'études

Le Plan d'études romand (CIIP, 2010) est relativement succinct en ce qui concerne la proportionnalité. Pour les classes de 5H à 8H, elle apparaît sous le titre MSN 23 : « Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs... » (cf. Annexe 1), dans les progressions d'apprentissage de la manière suivante : « Résolution de problèmes multiplicatifs et divisifs : situations d'itération, liées au produit cartésien, de produit de mesures, de **proportionnalité** », avec des références liées à la résolution de problèmes (MSN 25 : « Résoudre des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques en identifiant des invariants d'une situation (B), en triant et organisant des données (C), en communiquant ses résultats et ses interprétations (D) »).

En Suisse alémanique, dans le chapitre « *Grössen, Funktionen, Daten und Zufall* » (Grandeurs, fonctions, données et hasard), le *Lehrplan 21* (Staat Freiburg, Direktion für Erziehung, Kultur und Sport [EKSD], o.D.) propose pour le cycle 2 un développement beaucoup plus détaillé et plus concret de cette notion (cf. Annexe 1), en structurant les objectifs selon trois axes dont quelques extraits sont présentés ci-dessous (traduction des auteur·e·s) :

1. « *Operieren und Benennen* » (« Opérer et nommer »)
 - Les élèves comprennent et utilisent [le terme] proportionnalité
 - Ils savent décrire des tableaux de proportionnalité comportant des sommes d'argent et les compléter
 - Ils savent faire des calculs portant sur des relations de proportionnalité (temps-distance, quantité-prix à payer).
2. « *Erforschen und Argumentieren* » (« Explorer-rechercher et argumenter-raisonner »)
 - Les élèves savent explorer des relations entre longueurs, prix et durées
 - Ils savent formuler, explorer et justifier diverses relations fonctionnelles.
3. « *Mathematisieren und Darstellen* » (« Mathématiser et représenter »)

- Les élèves savent représenter et interpréter des données figurant dans des tableaux ou diagrammes et correspondant à des longueurs, des capacités, des masses, des durées, des nombres d'éléments d'un ensemble ou des prix
- Ils reconnaissent des relations de proportionnalité dans des situations concrètes.

En résumé, on note que le *Lehrplan 21* présente de manière plus détaillée et approfondie que le PER les éléments concernant la proportionnalité à développer avec les élèves du cycle 2. On imagine ici plus précisément le type d'exercices qui peut être demandé aux élèves alémaniques ainsi que leur degré d'abstraction alors que le PER mentionne le terme de proportionnalité sans expliciter dans quels types de situations les élèves doivent pouvoir la mobiliser.

Comparaison de la proportionnalité dans les moyens d'enseignement

Dans cette partie, nous allons comparer les manières d'aborder et de traiter la proportionnalité dans les livres du maître et les livres de l'élève francophones et germanophones du cycle 2 (de 5H à 8H). Nous nous référerons aux quatre livres du maître francophones (Danalet et al., 1998a, 1999a ; Chastellain et al., 2001a, 2002a), aux quatre livres de l'élève francophones (Danalet et al., 1998b, 1999b ; Chastellain et al., 2001b, 2002b), aux quatre livres du maître alémaniques (Hengartner et al., 2012, 2013 ; Affolter et al., 2011, 2014) et aux quatre livres de l'élève alémaniques (Hengartner et al., 2008a, 2008b ; Affolter et al., 2012, 2015) en vigueur dans les deux régions linguistiques du canton de Fribourg (cf. Annexe 2). Notre expérimentation s'étant déroulée en 2017, nous nous sommes penchés sur les moyens en vigueur à ce moment-là. Nous compléterons notre comparaison en nous référant également aux moyens ESPER de 5H et 6H qui ont déjà été publiés et à ceux de 7H qui sont en préparation.

On observe que :

- en 5H, les moyens francophones et germanophones proposent tous deux des exercices portant sur les notions de double et de moitié (demi), le moyen francophone introduisant en plus les termes triple, quadruple, tiers et quart ainsi que la recherche de la quatrième proportionnelle, pour laquelle il s'agit de développer une procédure de résolution d'un problème s'énonçant sous la forme : « si a correspond à b, alors c correspond à combien ? ». Le livre du maître francophone de 5H suggère l'utilisation de l'une des propriétés de linéarité ou le passage par la valeur unitaire, sans privilégier quelque méthode que ce soit (Danalet et al., 1998a, p. 173).
- En 6H, on trouve dans les deux moyens – romand et alémanique – des activités autour de l'agrandissement et de la réduction de figures et l'étude de situations concrètes (relation nombre d'objets-prix par exemple). On y introduit le coefficient de proportionnalité et y utilise les propriétés multiplicative et additive de la linéarité, la première propriété pouvant être représentée par des flèches lorsque les données sont présentées dans un tableau. Dans le moyen germanophone est développé en particulier le *Zweisatz*, qui prépare le *Dreisatz* (c'est-à-dire la règle de trois) et qui concerne une situation de proportionnalité plus simple à traiter dans laquelle on connaît l'image de l'unité, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité.
- En 7H, à la suite des activités du degré antérieur, on observe, analyse et interprète dans les livres du maître des deux régions, des tableaux de proportionnalité correspondant à des situations variées de la vie courante. Dans la méthodologie du moyen francophone, on développe les deux propriétés de linéarité (par rapport à la multiplication et à l'addition) à partir d'un exemple de tableaux de nombres et on les représente toutes les deux à l'aide de flèches. Ces représentations n'apparaissent dans la méthodologie alémanique qu'en 8H.
- En 8H, dans les deux moyens, sont analysés et complétés des tableaux de proportionnalité utilisant le coefficient de proportionnalité et les deux propriétés de linéarité représentées par des flèches.

Concernant la proportionnalité dans les nouveaux moyens de la plateforme ESPER (<https://www.cip-esper.ch/#/>) :

- en 5H, on ne trouve aucune information spécifique sur la proportionnalité.

- En 6H, il s'agit avant tout d'appliquer les propriétés de la somme et du produit comme le proposent les activités d'introduction « Plus de bandelettes » et « Multitude de bandelettes ». Les différentes activités proposées en 6H privilégient l'utilisation des propriétés de linéarité et le texte des axes thématiques concernant la proportionnalité sous ESPER 6H suggère aussi de les représenter à l'aide de flèches. Le passage par la valeur unitaire et l'utilisation du coefficient de proportionnalité sont également deux possibilités évoquées dans ce texte.

On constate ainsi que, dans l'ensemble, les recommandations pour le degré 6H sont les mêmes dans les moyens COROME et ESPER, mis à part l'accent mis sur les propriétés de linéarité dans les moyens ESPER.

- En 7H, le texte des axes thématiques concernant la proportionnalité est le même que celui de 6H. Pour le degré 7H, parmi les procédures de résolution des situations de proportionnalité, on relève également le passage par la valeur unitaire et l'utilisation du coefficient de proportionnalité. On dispose en effet à partir de ce degré de la division et des nombres décimaux.

On relève ainsi, dans les moyens francophones et germanophones du cycle 2, une certaine proximité en ce qui concerne le type d'activités proposées et l'introduction des deux propriétés de linéarité et ce, bien que la présentation de la proportionnalité dans le PER soit très brève, comparée à celle du *Lehrplan 21*. Dans les deux moyens, on note l'utilisation de tableaux et la représentation de la propriété de linéarité multiplicative par des flèches à partir de la 6H.

Exemples de résolutions de problèmes de proportionnalité de 6H (4P) dans les moyens des deux régions linguistiques

1) « Anciens moyens » francophones LM 4P (Danalet et al., 1999a, p. 170). Un des problèmes de l'activité « Chez le fleuriste » :

Problème 2

6 roses coûtent 9 francs. Combien coûtent 24 roses ?

roses	prix
6	9 fr.
24	?

Procédures possibles:

- chercher le prix d'une rose, puis chercher le prix de 24 roses
- observer la relation entre 6 et 24 et multiplier 9 par 4
- utiliser une procédure additive, 6 roses + 6 roses + 6 roses + 6 roses coûtent 9 fr. + 9 fr. + 9 fr. + 9 fr.
- ...

2) ESPER MER 6H plateforme ESPER (<https://www.ciiip-esper.ch/#/>). Un énoncé simplifié des « Problèmes pêle-mêle » :

5 roses coûtent 18 fr. Combien coûtent 50 roses ?

Corrigé : 50 roses, c'est 10 fois 5 roses ; le prix de 50 roses, c'est donc 10 fois le prix de 5 roses ; $10 \times 18 = 180$.

3) Moyens alémaniques 4. Klasse (6H) LM p. 187 (Hengartner et al., 2013, p. 187). Un des problèmes regroupés sous le titre « Einzelpreis – Gesamtpreis »² :

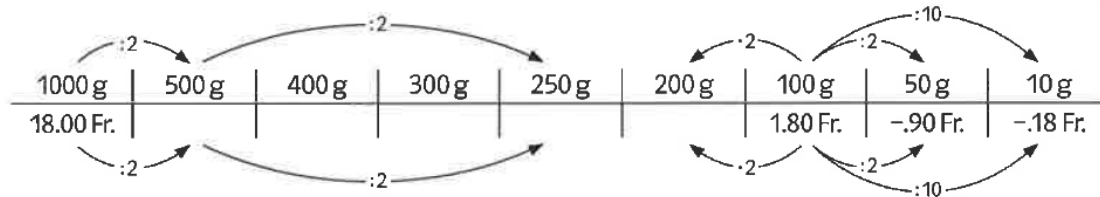
² Traduction des auteur·e·s : « Prix unitaire – Prix total ».

Les calculs dans le tableau de poids-prix peuvent être faits de la manière suivante (exemple du gorgonzola) :

[Le tableau complété]

Pour calculer le prix pour 400 g, on quadruple le prix pour 100 g ou on double le prix pour 200 g, ou encore on déduit le prix pour 100 g du prix pour 500 g. Pour calculer le prix pour 300 g, on triple le prix pour 100 g.

Die Gewichts-Preis-Tabellen können folgendermassen ausgerechnet werden (Beispiel Gorgonzola):



Für 400 g wird der 100-g-Preis vervierfacht oder der 200-g-Preis verdoppelt, oder vom 500-g-Preis wird der 100-g-Preis abgezogen. Für 300 g wird der 100-g-Preis verdreifacht.

Remarque : pour chacune de ces trois activités, au moins l'une des procédures de résolution proposées par les livres du maître respectifs repose sur la propriété du produit. Dans le moyen ESPER, le corrigé ne propose pas de représentation sous forme de tableau ni de flèches. L'utilisation de ce type de représentation, qui figure dans le texte des axes thématiques concernant la proportionnalité sous ESPER 6H, est laissée à l'initiative de l'enseignant·e.

CONCLUSION

Malgré les différences entre les directives des plans d'études, nous avons constaté que les moyens d'enseignement en vigueur en Suisse alémanique et en Suisse romande proposent des exercices assez similaires dans les différents degrés du cycle 2. Nous relevons l'utilisation de tableaux et le fait que les deux propriétés de linéarité sont représentées par des flèches dans les différents moyens d'enseignement. Si dans les nouveaux moyens francophones on note une certaine progression dans les procédures de recherche de la quatrième proportionnelle – l'application des propriétés de linéarité en 6H, puis le passage par la valeur unitaire ou l'utilisation du coefficient de proportionnalité à partir de la 7H –, les moyens germanophones et les moyens COROME utilisent ces différentes procédures en parallèle et de manière complémentaire.

Dans un prochain article, nous rendrons compte d'une expérimentation qui a consisté en la mise en œuvre et la comparaison de deux séquences portant sur l'approche de la proportionnalité en 6H. L'une a été réalisée dans une classe francophone et l'autre dans une classe germanophone du canton de Fribourg. L'attention y est portée en particulier sur les propriétés de linéarité, ainsi que sur l'aide éventuelle à la compréhension et à la résolution apportée par l'utilisation de tableaux et de flèches rendant compte de ces propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

- Affolter, W., Amstadt, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2011). *Schweizer Zahlenbuch 6: Begleitband mit CD-ROM*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Affolter, W., Amstadt, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2012). *Schweizer Zahlenbuch 5: Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Affolter, W., Amstadt, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2014). *Schweizer Zahlenbuch 5: Begleitband mit CD-ROM*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Affolter, W., Amstadt, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2015). *Schweizer Zahlenbuch 6: Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Charnay, R., & Mante, M. (2014). *Professeur des écoles. CRPE Mathématiques. Tome 2*. Paris : Hatier.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001a). *Mathématiques, Cinquième année : Méthodologie - Commentaires*. COROME ; Office romand des éditions et du matériel scolaire.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001b). *Mathématiques, Cinquième année : Livre de l'élève*. Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2002a). *Mathématiques, Sixième année : Méthodologie - Commentaires*. COROME ; Office romand des éditions et du matériel scolaire.
- Chastellain, M. & Jaquet, F. (2002b). *Mathématiques, Sixième année : Livre de l'élève*. Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- CIIP. (2010). *Plan d'étude romand*. <https://www.ciip-esper.ch/#/>

- Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998a). *Mathématiques, 3 : Livre du maître* - COROME ; Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- Danalet, C., Del Notaro, C., Dumas, J.-P. & Villars-Kneubühler, F. (1998b). *Mathématiques, Degré : 3e / Degré HarmoS : 5e : Livre de l'élève* - COROME ; Office romand des services cantonaux des éditions et du matériel scolaire.
- Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999a). *Mathématiques, 4 : Livre du maître* - COROME ; Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.
- Danalet, C., Del Notaro Studer, C., Dumas, J.-P. & Villars-Kneubühler, F. (1999b). *Mathématiques, Degré : 4e / Degré HarmoS : 6e : Livre de l'élève* - COROME ; Office romand des services cantonaux des éditions et du matériel scolaire.
- Gille, E. (2008), *Proportionnalité en Seconde ... et apprentissage de la citoyenneté*. Bulletin de l'APMEP, 474, 11-19.
- Hengartner, E., Müller, G. N., Wieland, G. & Wittmann, C. (2008a). *Schweizer Zahlenbuch 3: Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Hengartner, E., Müller, G. N., Wieland, G. & Wittmann, C. (2008b). *Schweizer Zahlenbuch 4: Schulbuch*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Hengartner, E., Müller, G. N., Wieland, G. & Wittmann, C. (2012). *Schweizer Zahlenbuch 3: Begleitband mit CD-ROM*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Hengartner, E., Müller, G. N., Wieland, G. & Wittmann, C. (2013). *Schweizer Zahlenbuch 4: Begleitband mit CD-ROM*. Klett und Balmer Verlag Zug.
- Hersant, M. (2005). *La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui*. Repères-IREM, 59,
- Ricco, G. (1978). *Le développement de la fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans*. Thèse de doctorat de 3e cycle.
- Simard, A. (2012a). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit x*, 89, 51-62.
- Simard, A. (2012b). Proportionnalité en CM2 et sixième. *Petit x*, 90, 35-52.
- Sokona, S.-B. (1989). Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation. *Petit x*, 19, 5-27.
- Staat Freiburg, Direktion für Erziehung, Kultur und Sport EKSD. (o.D.). *Fachbereich Mathematik*.
- Vergnaud, G. (1979). *Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré*. IREM d'Orléans.
- Weiss, L. (2012). Les modèles réduits : comment les considérations sur la masse d'un objet permettent d'approfondir la réflexion sur la proportionnalité. *Math-École*, 218, 24-27.

ANNEXE 1 - COMPARAISON DES PLANS D'ÉTUDES AU SUJET DE LA PROPORTIONNALITÉ

le PER (Plan d'études romand) de Suisse romande

	PER
5H–8H	Dans « MSN 23 – Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs... » : Résolution de problèmes multiplicatifs et divisifs : situations d'itération, liées au produit cartésien, de produit de mesures, de proportionnalité (B, C, D) Remarque du PER : Certains élèves confondent augmentation (ou diminution) et proportionnalité, pensant que toute augmentation est forcément proportionnelle et utilisent de ce fait la proportionnalité à mauvais escient. De plus, certains élèves pensent qu'il y a proportionnalité si on ajoute un même nombre aux deux nombres ou grandeurs proportionnels, l'idée d'augmentation étant souvent liée à l'addition (celle de diminution à la soustraction)

Le Lehrplan 21 de Suisse alémanique

	Lehrplan 21
5H –8H	Dans « Grössen, Funktionen, Daten und Zufall » : Operieren und Benennen – Zyklus 2 - Die SchülerInnen verstehen und verwenden [den Begriff] Proportionalität. - Sie können Wertetabellen zu proportionalen Zusammenhängen mit Geldbeträgen beschreiben und weiterführen (z. B. 100 g → 5.40 Fr.; 200 g → 10.80 Fr.; 300 g → 16.20 Fr., ...) - Sie können funktionale Zusammenhänge in Wertetabellen erfassen (z. B. zurückgelegte Distanzen bei einer Geschwindigkeit von 4.5 km/h nach 10 min, 20 min, 30 min, ...). - Sie können mit proportionalen Beziehungen rechnen (z. B. 300 g Käse zu 20 Fr./kg; Treibstoffverbrauch für 700 km zu 6 l/100 km). - Sie können Anteile bestimmen und vergleichen (z. B. in X mit 2 Spielwarengeschäften leben 12 000 Menschen; in Y mit 8 Spiel-warengeschäften leben 30 000 Menschen). Erforschen und Argumentieren – Zyklus 2 - Die SchülerInnen können Beziehungen zwischen Längen, Preisen und Zeiten überprüfen (z. B. grössere Gegenstände sind teurer oder weitere Wege brauchen mehr Zeit). - Sie können zu Beziehungen zwischen Grössen Fragen formulieren, erforschen, und funktionale Zusammenhänge überprüfen (z. B. die Füllhöhe von ½ Liter, 1 Liter, 2 Liter in verschiedenen Gefässen, das Verhältnis zwischen Preis und Gewicht eines Produkts, das Gewicht eines Lightgetränks und einer Limonade). - Sie können funktionale Zusammenhänge, insbesondere zu Preis-Leistung und Weg-Zeit, formulieren und begründen Mathematisieren und Darstellen – Zyklus 2 - Die SchülerInnen können Daten zu Längen, Inhalten, Gewichten, Zeitdauern, Anzahlen und Preisen in Tabellen und Diagrammen darstellen und interpretieren (z. B zu Haustieren).

	- Sie erkennen in Sachsituationen Proportionalitäten (z. B. zwischen Anzahl Schritten und Distanz). - Sie können zu einer proportionalen Wertetabelle Zusammenhänge beschreiben (z. B. die Anzahl min je zurück-gelegtem km)
--	--

ANNEXE 2 - COMPARAISON DES MOYENS COROME ET ESPER EN SUISSE ROMANDE ET DU ZAHLENBUCH EN SUISSE ALÉMANIQUE AU SUJET DE LA PROPORTIONNALITÉ

Remarque : dans le canton de Fribourg, le moyen de 5H de la plateforme ESPER a été introduit en septembre 2021 et celui de 6H le sera seulement en septembre 2022. Ainsi la séquence francophone sur la proportionnalité qui a été conduite en 6H au cours de l'année 2017 s'est référée aux « anciens » moyens COROME. C'est la raison pour laquelle dans le tableau de comparaison suivant on se rapporte à ces derniers moyens.

Légende

LM : livre du maître	BB: <i>Begleitband</i> (livre du maître)	linéarité x : propriété du produit
LE : livre de l'élève	SB: <i>Schulbuch</i> (livre de l'élève)	linéarité + : propriété de la somme
FE : fichier de l'élève		

Moyens COROME (papier) 5H
LE p. 53 : Quel âge ? (double, triple, demi, tiers)
LM p. 179 – LE p. 62 : Tarte (double, triple, quadruple, demi, tiers, quart, etc.)
LM p. 173 : Résolution de problèmes de proportionnalité (recherche de la quatrième proportionnelle)
<i>Zahlenbuch 5H</i>
BB p. 65-66 – SB p. 16-17 : <i>Verdoppeln, halbieren</i>
Moyens COROME (papier) 6H
Comparaison ou vérification d'informations conduisant à utiliser la proportionnalité :
LM p. 166 – LE p. 89 – FE p. 45 : Agrandir des rectangles selon un coefficient fixé
LM p. 182 – LE p. 30 : Dites-le avec des fleurs. Il s'agit d'un problème de proportionnalité que l'on peut résoudre en utilisant le passage par la valeur unitaire ou par application des propriétés de la somme et du produit
LM p. 170 : Chez le fleuriste (recherches de la quatrième proportionnelle selon différentes procédures : passage par la valeur unitaire, utilisation du coefficient de proportionnalité, application des propriétés de la somme et du produit)
LM p. 171 – LE p. 31 : En promotion
LM p. 184 : Festin (apparaissent le coefficient de proportionnalité, la linéarité x et la linéarité +, avec des flèches pour x)
<i>Zahlenbuch 6H</i>
BB p. 185-188 – SB p. 64-65 : Einzel- und Gesamtpreis (utilisation implicite du facteur de proportionnalité en appliquant le Zweisatz ; apparaissent également la linéarité x et la linéarité +, avec des flèches pour x)
BB p. 199-201 – SB p. 71 : Im Einkaufszentrum – Angebote vergleichen (linéarité x)

BB p. 203-206 – SB p. 72-73 : Vergrössern und verkleinern nach Massstab

BB p. 207-211 – SB p. 74-75 : Preislisten – Überlegen und ausprobieren

BB p. 277- 278 – SB p. 94-95 : Sachrechnen im Kopf

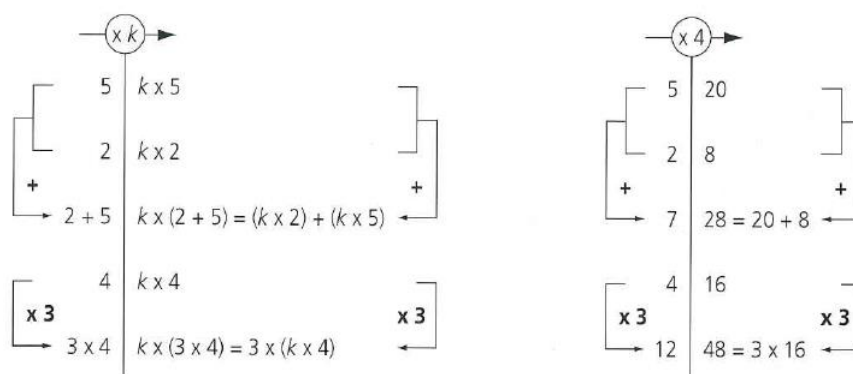
BB p. 299-300 – SB p. 103 : Wasserverbrauch – Rechnerische Durchdringung eines Sachthemas

Moyens COROME (papier) 7H

LM p. 161-178 : « Thème 9 Applications » exercices du type « La balance » LE p. 87 :

- observer des situations où interviennent des applications, en extraire les éléments pertinents, les organiser ;
- analyser et interpréter des tableaux et des représentations graphiques ;
- rechercher des liens entre deux grandeurs variables, chercher à les exprimer par des relations arithmétiques afin de les faire « fonctionner » pour d'autres valeurs des variables ;
- **distinguer les cas de linéarité, connaître leurs propriétés et les appliquer.**

LM p. 164-165 Les deux aspects de la linéarité :



Par le schéma précédent, on constate qu'on pourrait ignorer le facteur de linéarité (les liens horizontaux) et se « tirer d'affaire » en reproduisant les mêmes opérations entre nombres, d'un ensemble à l'autre :

- à l'image de la somme de 5 et de 2, on fait correspondre la somme des images de 5 et de 2 (propriété de la somme) ;
- à l'image du produit de 4 par 3, on fait correspondre le produit par 3 de l'image de 4 (propriété du produit).

Zahlenbuch 7¹¹

BB p. 181-185 – SB p. 52-53 : Vergrössern und verkleinern (linéarité $\times$ et linéarité $+$, avec des flèches pour $\times$)

BB p. 187-192 – SB p. 54-55 : Preistabellen – Preisberechnungen (tableau et coefficient de proportionnalité)

BB p. 287-292 – SB p. 90-91 : Gefässe füllen (linéarité $\times$ et linéarité $+$, avec des flèches pour $\times$)

Moyens COROME (papier) 8H

LM p. 173-196 : « Thème 7 Applications » exercices du type « Histoires de proportions » LE p. 76 :

- observer des situations où intervient la notion d'application pour en extraire les données significatives et les organiser, en distinguant, en particulier, les ensembles de départ et d'arrivée ;
- représenter ces situations par différents modèles : **tableaux**, « boîtes noires », graphiques, ... ;
- découvrir les lois de fonctionnement d'une **application linéaire** : **la règle du produit, celle de la somme** et l'existence d'un facteur de linéarité ;
- **compléter des tableaux de grandeurs proportionnelles en utilisant les lois découvertes précédemment** ;
- comparer des applications linéaires à d'autres qui ne le sont pas.

Zahlenbuch 8H

BB p. 165-170 – SB p. 30-31 : Tabellen untersuchen (linéarité x et linéarité +, avec des flèches pour x et pour +)

SB p. 30 :

Proportionalitätstabellen erkennt man an folgenden Eigenschaften:

1. Jedes Vielfache eines Zahlenpaars ergibt wieder ein Zahlenpaar der Tabelle.

Beispiel:

...	3	6	...
...	4,5	9	...

Diagram showing multiplication by 2: $\cdot 2$ (from 3 to 6) and $\cdot 2$ (from 4,5 to 9).

2. Jede Summe zweier Zahlenpaare ergibt wieder ein Zahlenpaar der Tabelle.

Beispiel:

...	3	4	...	7
...	4,5	6	...	10,5

Diagram showing addition: $+$ (from 3 to 4) and $+$ (from 4,5 to 6), and a larger arrow from 3 to 7 and 4,5 to 10,5.

3. Jede Zahl der Zeile x multipliziert man mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor und erhält so die entsprechende Zahl in der Zeile y.

Beispiel:

	1	2	3	4	...
$\cdot 1,5$	1,5	3	4,5	6	...

Diagram showing multiplication by 1,5: $\cdot 1,5$ (from 1 to 1,5).

SB p. 52-53 : Wandern – Kilometer pro Stunde

SB p. 54-55 : Zug fahren – Geschwindigkeit

UNE DÉMARCHE ALGÈBRIQUE SURPRENANTE

Sylvain Vermette, Mathieu Séguin

Université du Québec à Trois-Rivières

Mots clé : Mobilisation des connaissances de l'enseignant, raisonnement algébrique d'élève, équation du second degré, formation des enseignants

Résumé : En tant que didacticien des mathématiques, je suis amené par mes travaux de recherche à être en classe et à travailler avec des élèves autant du primaire, du secondaire que de l'université. Lors de ces visites et de ces travaux, je suis parfois stupéfait par ce que les élèves m'offrent, à travers divers raisonnements, erreurs, questions, stratégies et solutions. C'est à partir de la démarche d'un élève lors de la résolution d'une équation du second degré que je propose de tirer des réflexions.

LA MOBILISATION DES CONNAISSANCES DE L'ENSEIGNANT DANS SA PRATIQUE

On reconnaît maintenant que l'enseignant de mathématiques mobilise dans sa pratique des formes spécifiques de connaissances, différentes des formes standards apprises dans les cours de mathématiques universitaires (Ball, Thames & Phelps, 2008 ; Moreira & David, 2005, 2008 ; Margolinas, Coulange & Bessot, 2005). En effet, les récents développements sur les connaissances mathématiques des enseignants montrent que certaines connaissances prennent leur source dans la pratique d'enseignement, celles-ci étant donc reliées aux événements émergeant du contexte d'enseignement-apprentissage (Bednarz & Proulx, 2009 ; Davis & Simmt, 2006 ; Margolinas, 2014). Par exemple, lors de l'enseignement-apprentissage de concepts mathématiques, différentes situations peuvent survenir et être prises en compte par l'enseignant. Pensons aux raisonnements (adéquats ou non) permettant de donner un sens aux concepts ; aux conceptions, difficultés et erreurs sur les concepts travaillés et leurs compréhensions ; aux stratégies et approches diverses pour résoudre un problème ; aux représentations et symbolismes/écritures variées (standards ou non) pour exprimer une solution ; aux questions nouvelles et avenues à explorer, etc. (Bednarz & Proulx, 2009) Ces événements mathématiques ne se réfèrent pas uniquement aux concepts présents dans les curricula scolaires, qui établissent ce qui doit être enseigné, mais se réfèrent aussi aux éléments mathématiques qui entourent l'enseignement-apprentissage des mathématiques et avec lesquels l'enseignant doit travailler en classe. Ces travaux ont ouvert la voie à de nouvelles façons de penser la formation mathématique des enseignants, contribuant à interroger les structures en place à la formation des enseignants et à convaincre de la nécessité d'un changement d'orientation. Ils sont à la base d'une reconceptualisation de la composante mathématique de cette formation, à l'opposé de celle caractérisant plusieurs programmes de formation dans le monde, dans lesquels l'accent est mis sur des cours de mathématiques académiques très loin de la pratique mathématique en classe des enseignants (Bednarz & Proulx, 2009, 2010 ; Moreira & David, 2008). À cela s'ajoute le passage de l'idéal didactique aux déroulements réels en classe. Bref, le fossé existant entre la nature des expériences que vivent les enseignants durant leur formation initiale et les expériences qu'ils vivent dans leurs pratiques quotidiennes de classe constitue un enjeu pour la formation des enseignants en mathématiques.

Les connaissances mathématiques mobilisées par l'enseignant dans sa pratique ne renvoient généralement pas aux mathématiques enseignées en formation initiale soit des mathématiques considérées pour elles-mêmes, déconnectées et décontextualisées de la pratique. De cette conceptualisation des connaissances mathématiques scolaires des enseignants, qui se distinguent des mathématiques académiques (Proulx & Bednarz, 2010, 2011), il apparaît trois dimensions. (1) D'abord, leur nature, elles sont plus près d'un savoir-agir que de connaissances factuelles, « statiques », que l'on peut s'appropriier indépendamment de la pratique de classe qui leur donne sens (Bednarz & Proulx, 2009). Des travaux de recherche conduits en didactique des mathématiques sur les pratiques enseignantes montrent bien ces gestes professionnels qui sont développés dans l'action (e.g. Butlen, 2006 ; Roditi, 2005, 2013). (2) Ensuite, ces connaissances sont situées (Lave, 1988), elles s'élaborent dans un certain contexte lié à la pratique d'enseignement. Celles-ci

ne sont pas indépendantes de l'apprentissage des élèves, de la classe, du contexte dans lequel elles entrent en jeu. (3) Finalement, ces connaissances sont ce que Mason et Spence (1999) appellent « knowing-to act in the moment ». Ainsi, ce savoir-enseigner de l'enseignant se construit en classe et s'adapte en temps réel à la situation, en réaction à celle-ci. On parle ici de connaissances déployées sur-le-champ, liées à l'intervention en réponse à un événement (un script qui sort de la planification initiale, une question surprenante d'un élève, une réponse inattendue, une erreur non prévue, etc.). Vouloir intervenir sur-le-champ peut alors représenter un défi important. Cet article veut, par un exemple, illustrer ce qui précède et montrer par le fait même qu'une analyse de productions d'élèves peut parfois mener à des réalisations mathématiques fascinantes.

LA RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Dernièrement, lors d'une visite en classe au Québec, j'ai été témoin du raisonnement erroné d'un élève de 4e secondaire (15-16 ans), au cours d'une séquence d'enseignement portant sur la factorisation, lorsque venu le temps de résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Dans ce qui suit, la démarche attendue par l'enseignant au premier exercice présenté est décrite ainsi que la démarche proposée par l'élève.

Résoudre pour x : $2x^2 + 5x + 3 = 0$

Démarche possible

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$2x^2 + 2x + 3x + 3 = 0$$

$$2x(x + 1) + 3(x + 1) = 0$$

$$(2x + 3)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = -3/2 \quad x_2 = -1$$

Démarche de l'élève

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -2$$

Nous sommes en présence d'une équation du second degré qu'il faut résoudre. Pour y arriver, la factorisation en produit de facteurs du premier degré s'avère être une stratégie intéressante puisqu'il est aisé d'appliquer la « méthode » somme-produit dans le cas spécifique de ce trinôme. Ceci explique fort probablement pourquoi il s'agit non seulement de la démarche mobilisée par l'enseignant pour résoudre l'équation en question, mais aussi de celle attendue chez l'élève. Lorsque l'élève est intervenu en classe afin de faire connaître sa démarche, l'enseignant a été déstabilisé. Ce dernier devait analyser en temps réel une stratégie d'élève qui peut paraître déroutante et à laquelle il n'était pas préparé à faire face. Il aurait été possible pour lui de balayer du revers de la main la démarche de l'élève. En mathématique, il n'est pas rare d'associer simplement les erreurs des élèves à l'inattention, au manque de travail ou aux incompréhensions. Toutefois, l'enseignant y a démontré un certain intérêt et a cherché plutôt à comprendre la stratégie de l'élève en prenant soin de lui demander d'expliquer en détail chaque étape de son raisonnement. Cependant, ne voyant pas comment exploiter sur-le-champ la démarche de l'élève afin de contribuer à la situation d'enseignement-apprentissage, l'enseignant décida plutôt de revenir à la démarche attendue en mentionnant que la démarche de l'élève ne permettait pas d'arriver à trouver les « bonnes » valeurs de x . Il faut avouer qu'il n'est pas toujours évident de voir la richesse mathématique qui se cache derrière l'erreur. Certes une analyse a priori de la tâche aurait peut-être pu aider l'enseignant à relever le défi qui se présentait à lui ici, soit de mobiliser des connaissances mathématiques scolaires au regard de la stratégie véhiculée par l'élève. Au même moment, l'analyse a priori d'une tâche n'est pas un exercice nécessairement exhaustif. En effet, il peut être difficile d'anticiper l'ensemble des réactions possibles des élèves en classe. Parfois un recul s'avère nécessaire afin de permettre une analyse plus en profondeur des événements qui ont émergé du contexte d'enseignement-apprentissage. Prêtons-nous au jeu et procédons maintenant à une analyse a posteriori de la démarche erronée de l'élève qui à première vue fait peu de sens.

À partir de la forme générale $ax^2 + bx + c$, son raisonnement revient en quelque sorte à transférer le facteur multiplicatif du coefficient a au coefficient c pour obtenir une nouvelle expression algébrique de la forme

$x^2 + bx + c$, où le coefficient c_1 résulte de la multiplication du coefficient a et du coefficient c . Dans le cas qui nous concerne, l'élève divise le 1er terme par 2 pour ensuite multiplier le 3e terme par 2. Ces actions laissent en quelque sorte l'impression d'annuler l'effet des transformations sur l'équation algébrique initiale puisque deux opérations inverses, diviser par 2 pour ensuite multiplier par 2, ont été effectuées. Toutefois, une telle transformation ne permet pas d'obtenir une équation équivalente, c'est-à-dire une équation qui admet le même ensemble solution, afin de trouver la valeur de l'inconnue qui vérifie l'équation initiale. Pour y arriver, il aurait fallu opérer sur chacun des termes de l'équation de la même façon, par exemple en multipliant chacun des termes de l'équation par 2 afin d'obtenir l'équation $4x^2 + 10x + 6 = 0$. Cette nouvelle équation obtenue aurait alors été équivalente à celle initiale.

Quel pourrait être l'intérêt pour l'élève de procéder ainsi ? La raison invoquée par ce dernier est qu'il s'avère plus simple pour lui de résoudre une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$ en comparaison avec une autre de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. En effet, pour une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$, il suffit d'abord de factoriser le trinôme avec la « méthode » somme-produit en cherchant deux entiers dont la somme est le coefficient de x et dont le produit équivaut à c puisque le coefficient a vaut 1, soit l'élément neutre de la multiplication. Les deux entiers de signes opposés à ceux trouvés correspondent ensuite à la solution recherchée. Résoudre une équation sous cette forme exige ainsi moins de manipulations algébriques, ce qui pourrait même contribuer à y arriver mentalement. La problématique soulevée précédemment demeure toutefois, car la démarche de l'élève pour obtenir une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$ ne permet pas de générer une équation équivalente. L'équation équivalente à celle initiale comportant un coefficient a valant 1 aurait été obtenue ici en divisant chaque terme de l'équation par 2, l'équation résultante aurait alors été $x^2 + 5/2 x + 3/2 = 0$. Cette expression peut présenter un défi de factorisation plus important chez certains élèves notamment puisqu'elle admet des coefficients b et c écrits sous la forme de fractions, ce qui complexifie l'exercice de factorisation. Imaginons un second exercice qui illustre bien ce qui précède.

Résoudre pour x : $14x^2 - 19x - 3 = 0$

Démarche possible

$$14x^2 - 19x - 3 = 0$$

$$14x^2 - 21x + 2x - 3 = 0$$

$$7x(2x - 3) + 1(2x - 3) = 0$$

$$(2x - 3)(7x + 1) = 0$$

$$x_1 = 3/2 \quad x_2 = -1/7$$

Démarche (simulée) de l'élève

$$14x^2 - 19x - 3 = 0$$

$$x^2 - 19x - 42 = 0$$

$$(x - 21)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 21 \quad x_2 = -2$$

L'équation équivalente dans ce second exemple avec un coefficient a ayant une valeur de 1 serait : $x^2 - 19/14 x - 3/14 = 0$. On constate au regard de cette nouvelle équation, équivalente à celle initiale, que la démarche de l'élève apparaît beaucoup plus intéressante afin de simplifier l'exercice de factorisation. Bien entendu, cette démarche est erronée, mais l'est-elle vraiment ? Il est possible de constater à partir des deux exercices présentés que la réponse obtenue par l'élève n'est pas très loin de celle désirée. En fait, la démarche de l'élève « grossit » la réponse d'un facteur a . Dit autrement, les valeurs de x trouvées à partir de la démarche de l'élève correspondent aux valeurs de la solution recherchée multipliées par la valeur du coefficient a ($21 = 3/2 \cdot 14$ et $-2 = -1/7 \cdot 14$). Il suffirait donc à l'élève de réaliser une étape supplémentaire pour compléter sa démarche et obtenir par le fait même la bonne réponse soit de diviser les valeurs de x obtenues par la valeur du coefficient a de l'équation initiale. En agissant ainsi, il réinvestirait le coefficient utilisé au départ afin de générer sa nouvelle équation, comme s'il faisait en quelque sorte le chemin inverse pour retourner au point de départ. Par exemple, dans le second exemple, il suffirait à l'élève de diviser les valeurs de x par 14 afin de trouver que $x_1 = 21/14 = 3/2$ et que $x_2 = -2/14 = -1/7$ soit la solution recherchée.

Tentons de comprendre le raisonnement mathématique sous-jacent à la procédure spécifique utilisée par l'élève. Comme l'hypothèse d'équations algébriques équivalentes a été rejetée précédemment, explorons

une solution graphique qui s'inscrit dans le cadre des fonctions. Pour ce faire, débutons par faire une table de valeurs liée aux trinômes de l'exercice 1 que l'on associe à une relation du second degré, soit $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ et $g(x) = x^2 + 5x + 6$.

x	0	1	2	4	8
$f(x) = 2x^2 + 5x + 3$	3	10	21	55	171
$g(x) = x^2 + 5x + 6$	6	12	20	42	110

En observant attentivement cette table de valeurs, une régularité ressort entre les points des fonctions f et g . En effet, il est possible de générer les points de la fonction g en doublant les coordonnées des points de la fonction f . En d'autres termes, à chaque point de la fonction f , il est possible de lui associer un point de la fonction g en multipliant ses coordonnées par 2. Par exemple, le point $(0, 3)$ appartenant à la fonction f permet de générer le point $(0, 6)$ qui, lui, appartient à la fonction g . Dans le même sens, il est possible d'associer les points qui suivent :

Points de la fonction f		Points de la fonction g
$(1, 10)$	$\mapsto$	$(2, 20)$
$(2, 21)$	$\mapsto$	$(4, 42)$
$(4, 55)$	$\mapsto$	$(8, 110)$

Il s'avère alors que l'élève effectue à chaque point de la fonction f une homothétie de centre $(0, 0)$ avec un rapport de 2, soit la valeur du paramètre a de la fonction f . De façon plus générale, il associe à chaque couple (x, y) de la fonction f un couple deux fois plus grand, $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$, ce qui engendre la fonction g . Voici un graphique qui permet de bien visualiser cette homothétie de centre O , qui associe à chaque point de la fonction initiale f un point image, créant ainsi la fonction g , la fonction image.

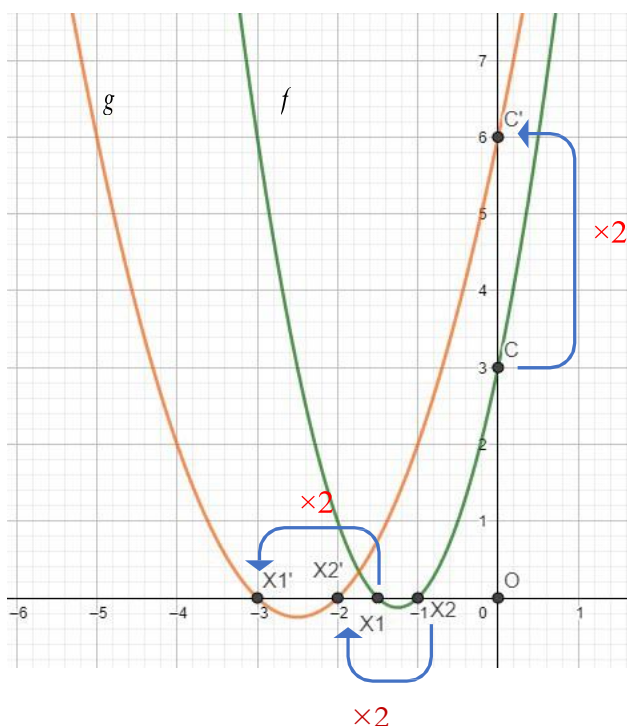


Fig. 1 : Homothétie de la fonction f de centre $(0,0)$

Dans le cas du calcul des zéros effectué par l'élève à l'exercice 1, les zéros trouvés correspondent à ceux de la fonction image engendrée par l'homothétie, soit $g(x)$. Pour retrouver les zéros de la fonction f , l'élève n'a qu'à faire l'homothétie inverse, soit une homothétie de centre O avec un rapport de $1/2$, ce qui revient à diviser les zéros obtenus par 2. Cette procédure est généralisable pour toute homothétie de centre $(0, 0)$ et de rapport a où on peut associer à chaque couple initial (x, y) un couple image (ax, ay) .

$$(x, y) \mapsto (ax, ay)$$

En substituant y par une fonction $f(x)$ de la forme $ax^2 + bx + c$ afin de voir l'effet de l'homothétie sur celle-ci, on obtient :

$$(x, f(x)) \mapsto (ax, af(x))$$

Pour une valeur initiale quelconque de x , on obtient un point image qui a subi une homothétie, transformant autant ce x initial que son y initial. Si on s'intéresse à l'ordonnée de ce même x initial après avoir subi l'homothétie, on doit alors diviser ce x par a pour retrouver son y image dans la fonction initiale. Dans ce cas précis, la fonction initiale dépend alors de x/a .

En substituant x dans la fonction initiale de $ax^2 + bx + c$ par x/a , on obtient :

$$a \cdot f(x/a) = a(a(x/a)^2 + b(x/a) + c) \quad [\text{par substitution}]$$

$$a \cdot f(x/a) = a(a(x^2/a^2) + b(x/a) + c) \quad [\text{par les propriétés des exposants}]$$

$$a \cdot f(x/a) = a(x^2/a + bx/a + c) \quad [\text{par simplification}]$$

$$a \cdot f(x/a) = x^2 + bx + a \cdot c \quad [\text{par distributivité}]$$

La démonstration algébrique qui précède illustre que pour toute fonction de la forme $ax^2 + bx + c$, il existe une deuxième fonction de la forme $x^2 + bx + c_1$ où $c_1 = a \cdot c$, obtenue par homothétie de centre $(0, 0)$ et de rapport a . Un intérêt possible d'utiliser cette deuxième fonction est qu'elle permet de calculer plus facilement les deux zéros en prenant l'opposé des deux nombres dont la somme équivaut à b et le produit à c_1 . Retrouver les zéros de la fonction initiale peut alors être plus accessible en effectuant l'homothétie inverse, c'est-à-dire de rapport $1/a$.

$$(ax, af(x)) \mapsto (x, f(x))$$

CONCLUSION

L'intention derrière cet article était double. D'abord, il voulait alimenter la réflexion mathématique et didactique au regard de la démarche d'un élève, observée lors d'une visite en classe, au moment venu de résoudre une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Bien entendu, ce ne sont évidemment pas toutes les erreurs ou tous les raisonnements d'élèves qui ont le même potentiel mathématique. Mais il appert, comme nous avons voulu le montrer ici, que si nous prenons le temps de nous y attarder, des richesses mathématiques peuvent parfois émerger. Il voulait ensuite illustrer qu'il n'est pas toujours simple pour un enseignant de mobiliser ses connaissances dans la pratique et d'intervenir lorsque confronté notamment à des stratégies d'élèves. L'enseignant doit souvent s'adapter en temps réel à des réponses ou raisonnements d'élèves manifestés dans l'action, vécus en classe, en réaction à ceux-ci et n'étant pas nécessairement prévus. On y voit là un enjeu lié à la formation initiale des enseignants en mathématiques puisque cette interaction entre formation et pratique de classe soulève des préoccupations. Il semble y avoir un besoin de formation chez les enseignants en lien étroit avec un travail articulé au contexte d'enseignement. Étant donné les limites possibles de la formation initiale et les expériences vécues en classe, un dispositif de formation continue orienté sur des mathématiques enracinées dans la pratique d'enseignement prend alors tout son sens afin de contribuer au développement professionnel des enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bednarz, N. & Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : Clarifications conceptuelles et épistémologiques. *For the learning of mathematics*, 29(3), 11-17.
- Bednarz, N. & Proulx, J. (2010). Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : Exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques. *Éducation et Formation*, e-293, 21-36.
- Butlen, D. (2006). Stratégies et gestes professionnels de professeurs des écoles débutants enseignant dans des écoles de milieux défavorisés : un enjeu pour les apprentissages des élèves. Dans N. Bednarz & C. Mary (dir.), *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone. Sherbrooke, Canada : éditions du CRP. CD-ROM.
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293-319.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge University Press.
- Margolinas, C., Coulange, L. & Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 205-234.
- Margolinas, C. (2014). Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie*, 188, 13-22.
- Mason, J. & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 135-161.
- Moreira, P. C. & David, M. M. (2005). *Mathematics in teacher education versus mathematics in teaching practice*. ICMI-15 Study - The professional education and development of teachers of mathematics. Sao Paolo, Brazil. CD-ROM.
- Moreira, P. C. & David, M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal for Mathematics Teacher Education*, 11(1), 23-40.
- Proulx, J. & Bednarz, N. (2010). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1 : Réflexions fondées sur une analyse des recherches. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana*, 1(1), 1-24. <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2187>
- Proulx, J. & Bednarz, N. (2011). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 2 : Une entrée potentielle par les mathématiques professionnelles de l'enseignant. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana*, 1(2), 1-23. <https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/viewFile/2271/1833>
- Roditi, É. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques*. L'Harmattan.
- Roditi, É. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques*, 15, 39-60.

JEUX VIDÉO ACTIFS, MATHÉMATIQUES ET ÉDUCATION PHYSIQUE : LE CAS DE LA PLATEFORME PLAY LÜ

Patrick Fargier, Valerian Cécé, Guillaume Girod, Nicolas Burel, Jimmy Serment, Cédric Roure,
Vanessa Lentillon-Kaestner

Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud

Mots clés : jeux vidéo actifs, plateforme Play Lü®, éducation physique, mathématiques

Résumé : Des travaux scientifiques ont mis en exergue des liens étroits entre le mouvement humain et la cognition numérique. Ils plaident ainsi en faveur de la mise en place, à l'École, de croisements entre éducation physique et mathématiques. L'émergence de jeux vidéo actifs pourrait favoriser de tels croisements, possibilité que le présent article envisage dans le cas de la plateforme Play Lü®, en appui sur la littérature quant aux relations entre arithmétique, rotation mentale et motricité.

INTRODUCTION

Depuis quelques décennies, on assiste au développement d'une diversité de technologies numériques qui ont impacté les jeunes générations. Récemment, des jeux vidéo dits actifs (JVA) ont été développés ; ces jeux amènent à interagir avec un environnement numérique non pas via le maniement d'un clavier ou d'un joystick, mais par le biais de mouvements corporels plus globaux tels qu'une locomotion ou un lancer de balle. Dans certains JVA, cette interaction a en outre cours dans le cadre de la réalisation d'une tâche cognitive (e.g., un calcul mental). L'école s'étant ouverte à certaines technologies numériques et encourageant l'interdisciplinarité, on peut se demander si de tels JVA peuvent avoir un impact positif sur les apprentissages scolaires. Dans le cadre de cet écrit, la réflexion se centrera sur les possibles effets d'apprentissage de JVA associant mouvement et contenus mathématiques.

D'une manière générale, il sied de noter que tout JVA est, à l'instar des jeux vidéo classiques, conçu pour être attractif. Les JVA sont ainsi censés favoriser l'engagement et l'attention dans les tâches qu'ils appellent à effectuer. En s'appuyant initialement sur une visée ludique et commerciale, les jeux vidéo dans leur ensemble ont des caractéristiques censées maintenir la concentration des utilisateurs (King, Delfabbro & Griffiths, 2010). L'environnement audio-visuel de ces jeux, avec des graphismes et des sons qui accompagnent l'évolution des pratiquant·e·s, contribue à capter leur attention et à augmenter durablement leur investissement. Il s'ajoute à cela le côté immersif proposé via une narration propre à l'environnement digital. De plus, dans la majorité des cas, les JVA permettent un paramétrage des situations afin d'en adapter la difficulté et la complexité à chaque pratiquant·e. Un tel paramétrage peut en outre être réitéré à volonté, ce qui aide à la répétition, aspect fondamental du processus d'apprentissage (e.g., Greene, 2008). Enfin, ce type d'outils favorise les feedbacks sans coût humain important. Les pratiquant·e·s obtiennent un retour fréquent, objectif et précis sur la performance réalisée, ce qui peut favoriser l'apprentissage (e.g., Wisniewski, Zierer & Hattie, 2020). Il est ainsi envisageable que les JVA, de par leur propension à favoriser l'engagement, le dosage de la difficulté des tâches, la répétition et l'apport de feedbacks, puissent impacter positivement l'apprentissage des tâches qu'ils proposent. La pratique d'un JVA pourrait ainsi se révéler utile aux apprentissages scolaires en mathématiques, si tant est que ce JVA intègre une tâche pertinente au regard des attendus dans cette branche.

Les mouvements suscités par la pratique des JVA pourraient en outre potentialiser de tels apprentissages, en particulier dans le cas de l'arithmétique. Les travaux sur la cognition numérique ont en effet suggéré

que certains aspects du traitement numérique ou des opérations sur les nombres¹ s'enracinent dans des mouvements corporels expérimentés en amont (e.g., Fischer & Shaki, 2018)². Il en résulterait des liens pérennes entre motricité et cognition numérique, ce qui pourrait notamment concourir à expliquer que certains gestes déictiques (i.e., des gestes de pointage utilisés pour désigner quelque chose) sont de nature à sous-tendre la production de représentations pertinentes en mathématiques (e.g., Goldin-Meadow, Cook & Mitchell, 2009)³.

Plusieurs travaux en neuro-imagerie ont en tout état de cause mis en évidence une activation fonctionnelle accrue du cortex prémoteur, connu pour jouer un rôle clé dans la préparation du mouvement, lors d'un calcul mental effectué en l'absence de tout mouvement (e.g., Hanakawa et al., 2002). D'autres travaux (e.g., Khayat, Champely, Diab, Rifai Sarraj & Fargier, 2019 ; 2021) ont suggéré que le contrôle de la direction d'un mouvement, horizontal ou vertical, et la réalisation de tâches numériques pourraient requérir des mécanismes attentionnels similaires, ce qui tiendrait à ce que les représentations mentales des nombres sont spatialement structurées (sur une ligne, horizontale ou verticale)⁴. Les nombres seraient ainsi mentalement représentés en ordre croissant depuis la gauche vers la droite ou depuis le bas vers le haut, chez un sujet occidental, ce qui induirait des focus attentionnels spatialement orientés, par exemple vers la droite durant une addition mentale (Knops, Viarouge & Dehaene, 2009), et interférerait avec le contrôle de la direction d'un mouvement horizontal.

Par ailleurs, la capacité à effectuer certaines tâches numériques⁵ s'est avérée liée au niveau d'efficacité dans la réalisation de tâches de rotations mentales, la capacité de rotation mentale⁶ étant l'une des capacités intellectuelles de base (Johnson & Bouchard, 2005). Or, plusieurs études ont montré un lien entre les résultats obtenus à des tests de rotation mentale et le niveau de performance dans des activités physiques mobilisant les capacités spatiales (e.g., Hoyek, Champely, Collet, Fargier & Guillot, 2014). Il est ainsi envisageable que la relation entre mouvement et tâches numériques puisse tenir, pour partie, à la capacité de rotation mentale. Peu d'études ont porté à la fois sur la rotation mentale, l'activité physique et les mathématiques, mais on dispose de résultats indiquant un possible effet conjoint d'une pratique physique

¹ On se reporte ici au distinguo opéré par Arsalidou, Pawliw-Levac, Sadeghi et Pascual-Leone (2018) entre : (1) « *number tasks* » intégrant des nombres et/ou quantités sans requérir de calcul formel et (2) « *calculation tasks* » requérant en outre l'application de règles de calcul pour opérer sur des nombres. On parlera ici par convention de traitement numérique dans le premier cas et d'opérations sur les nombres dans le second ; par commodité, on regroupera en outre ces deux types de tâches sous le vocable de tâches numériques.

² Le recours aux doigts pour apprendre à compter et calculer semble illustrer cette relation entre motricité et cognition numérique. Cette relation ne concerne pas que les enfants et perdure à l'âge adulte. La gnose des doigts (capacité à percevoir, discriminer et se représenter ses propres doigts) est ainsi un prédicteur de la performance dans diverses tâches numériques chez l'enfant (e.g., Soylu, Raymond, Gutierrez & Newman, 2017) et l'adulte (e.g., Penner-Wilger, Waring & Newton, 2014).

³ Dans cette étude, des enfants de 9-10 ans apprenaient à trouver un terme manquant dans un énoncé présentant deux sommes égales (e.g., $4 + 5 + 7 = _ + 7$), en appui sur une consigne voulue clarifier l'intention à adopter (« *I want to make one side equal to the other side* », i.e., « je veux faire en sorte que chaque côté soit égal à l'autre »). En ce cadre, le recours à l'index et au majeur formant un « V », pour désigner les deux nombres à ajouter afin de trouver le terme manquant, est apparu favoriser l'apprentissage.

⁴ Une série d'études a montré que les grandeurs numériques sont ordonnées mentalement de façon croissante sur une ligne. L'une des démonstrations de cette relation entre nombres et espace réside dans la découverte de l'effet SNARC (« *Spatial Numerical Association of Response Codes* ») par Dehaene, Bossini et Giraux (1993). Dans cette étude, un nombre apparaissait sur un écran et les sujets, assis devant l'écran, devaient juger ce nombre en tant que pair ou bien impair puis indiquer leur jugement en usant de leurs mains. Il s'agissait tantôt d'utiliser la main gauche dans le cas d'un nombre jugé pair et la droite, dans le cas d'un nombre jugé impair, tantôt d'utiliser la main droite dans le cas d'un nombre jugé pair et la gauche, dans le cas d'un nombre jugé impair. Des sujets français se sont avérés répondre plus vite avec la main gauche quand le nombre présenté était petit (comparativement à un nombre plus grand) et avec la main droite quand le nombre présenté était grand (comparativement à un nombre plus petit). Cet effet est apparu culturellement dépendant, étant par exemple inversé chez des sujets habitués à un sens d'écriture de droite à gauche (Zebian, 2005). D'autres effets SNARC ont été mis en évidence, en particulier un effet SNARC vertical (Knops, 2018).

⁵ Par exemple : une tâche d'addition avec un terme manquant dans le cas d'enfants de 6-8 ans (Cheng & Mix, 2014) ou de comparaison de nombres par des adultes (Thompson, Nuerk, Moeller & Kadosh, 2013).

⁶ La capacité de rotation mentale est la capacité d'un sujet à faire pivoter l'image mentale d'un objet (en 2D ou 3D), ce qui permet notamment de s'imaginer la vue qu'on en aurait une fois cette rotation achevée (e.g., Voyer, Voyer & Bryden, 1995).

sur la performance à un test de rotation mentale et l'efficacité dans une tâche numérique (e.g., Fargier, Bal & Massarelli, 2016).

Un ensemble de résultats scientifiques vient ainsi supporter l'idée que des ponts pourraient être créés entre mathématiques et éducation physique et sportive (EPS) à l'École. La mise en place de tels ponts a été suggérée dans le champ professionnel (e.g., Nilges & Usnick, 2000), ce qui a notamment suscité des propositions d'enseignements interdisciplinaires⁷.

Malgré les avancées de la recherche sur les relations entre mouvement et cognition numérique ou rotation mentale, l'essor de telles pratiques professionnelles a été relativement modéré jusqu'ici, possiblement en raison d'un manque d'outils spécifiquement dédiés. Certains JVA pourraient contribuer à combler ce manque, en proposant des jeux qui intègrent des problèmes cognitifs, notamment de mathématiques, et des tâches motrices, par exemple de lancer de balle pour indiquer la réponse trouvée à un problème cognitif. La plateforme Play Lü[®], dont s'est dotée récemment la Haute École Pédagogique du canton de Vaud, intègre ainsi des JVA de nature à intéresser à la fois l'enseignant·e en mathématiques et l'enseignant·e en EPS. Les pratiquant·e·s sont ici immergés dans des jeux projetés sur un mur (image de 6 m sur 3 m) et intégrant une série d'animations audiovisuelles. À la différence des premiers JVA (e.g., Nintendo Wii[®], Microsoft Kinect[®]), cette plateforme n'a pas été uniquement conçue pour une logique de divertissement, mais également pour répondre à des enjeux éducatifs et s'adresse avant tout à une clientèle située dans le monde de l'enseignement. Dans l'essentiel des cas, les pratiquant·e·s interagissent avec l'application via des lancers de balle, dont l'impact est détecté par le système Lü. Cette plateforme a aussi l'originalité de proposer, outre des jeux en individuel ou en duel, des jeux sur un mode collectif, purement coopératif ou inter-équipes, ce qui est susceptible de favoriser l'engagement des pratiquant·e·s (Moss et al., 2018).

L'objet de cet article est ainsi d'envisager l'intérêt des jeux proposés par la plateforme Play Lü[®], au regard des liens entre motricité et cognition numérique ou rotation mentale qu'ils suscitent.

DÉMARCHE

Les jeux vidéo actifs de la plateforme Play Lü[®] renvoyant à une diversité de champs (arts visuels, géographie, langues, etc.)⁹, il a d'abord fallu circonscrire ceux qui, dans une même session de jeu, appellent à mobiliser des ressources motrices et intègrent des tâches numériques ou de nature à mobiliser la capacité de rotation mentale (Fig. 1).

Parmi les 41 applications inventoriées, trois peuvent être qualifiées d'utilitaires dans le sens où elles servent d'outils au service d'autres jeux¹⁰ : Teäms permet ainsi de constituer aléatoirement des équipes. En outre, 11 applications ciblent spécifiquement la motricité ou la corporéité des sujets¹¹, comme Bëep qui permet une évaluation de la vitesse maximale aérobie. Une part notable des applications (20 applications) n'a de rapport direct ni à la rotation mentale, ni aux mathématiques¹² : Minemot appelle ainsi à composer un mot, dont le désigné est exprimé sous forme de dessin, à partir de lettres présentées à l'écran.

⁷ Par exemple, dans le cas de la France, les enseignements pratiques interdisciplinaires (EPI) : <https://eduscol.education.fr/document/17086/download>.

⁸ <https://play-lu.com/fr/>

⁹ Pour une présentation de ces applications : <https://play-lu.com/fr/applications/> (au 24 décembre 2021, 41 applications étaient inventoriées).

¹⁰ Ces trois applications sont : Chrono, Scoreboard et Teäms.

¹¹ Ces 11 applications sont : Bëep, Corner, Dojo, Dunk, Gaïa, Galactic, Mire, Relé, Roar, Tactik et Touchdown.

¹² Ces 20 applications sont : Bülle, Brüşh, Germ, Grüb, Jam, Lëaf, Lüvia, Minemot, Mööd, Phÿs, Pila, Pixël, Scala, Shäpes, Stória, Swët, Twins, Vika 2.0, Wörlds et Zoo.

Sept applications ont à terme été sélectionnées qui sont de deux types : (1) applications intégrant des tâches motrices et des tâches numériques (Constello, Newton 2.0, Sphynx et Wak) et (2) applications associant motricité et rotation mentale (Danza, Gröove et Puzz).

Afin de spécifier l'intérêt de ces applications dans le cadre d'enseignements qui associeraient mathématiques et EPS, celles-ci ont été examinées à la lumière des connaissances scientifiques disponibles quant aux relations entre motricité et (1) cognition numérique ou (2) rotation mentale.

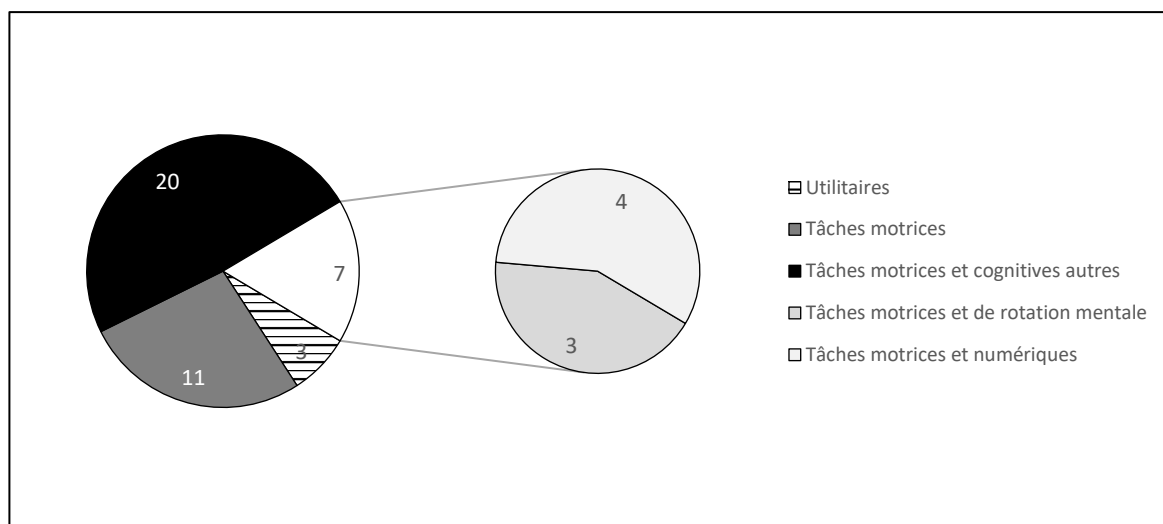


Fig. 1 : Typologie des applications de Play Lü®

ANALYSES PROSPECTIVES

Play Lü, motricité et nombres : un impact sur l'efficacité dans des tâches numériques ?

Quatre applications proposent des jeux intégrant des tâches motrices et numériques : Wak, Newton 2.0, Constello et Sphynx.

Dans le cas de Wak, l'écran montre des lapins sortant sporadiquement de leur terrier en tenant une affichette sur laquelle est inscrit un nombre. Une information est donnée aux pratiquant·e·s, invitant à une comparaison de nombres, par exemple, « < 8 ». Les pratiquant·e·s doivent lancer une balle sur chaque lapin présentant un nombre correspondant à cette information.

Newton 2.0 renvoie à une mécanique de jeu voisine. Il s'agit d'effectuer mentalement une opération s'affichant sur un écran avec, en dessous, six résultats possibles indiqués dans des cercles. L'opération étant réalisée (selon le niveau des élèves et de la difficulté de l'opération, en recourant au répertoire mémorisé et/ou via un calcul réfléchi), le·la pratiquant·e doit lancer une balle sur l'un des six cercles à l'intérieur desquels sont indiqués des résultats possibles (Fig. 2).

Les applications Constello et Sphynx requièrent quant à elles la détermination d'un point à partir de ses coordonnées dans un système orthonormé. Dans le cas de Constello, un point est à trouver dans le système d'axes, en fonction de coordonnées fournies ; il s'agit à terme de lancer une balle sur le point jugé correspondre à ces coordonnées (Fig. 2). Dans le cas de Sphynx, on dispose *a priori* de solutions possibles, sous forme de points indiqués par des avatars, et il s'agit de sélectionner celle qui renvoie au couple de valeurs fourni, pour lancer une balle sur l'avatar correspondant.

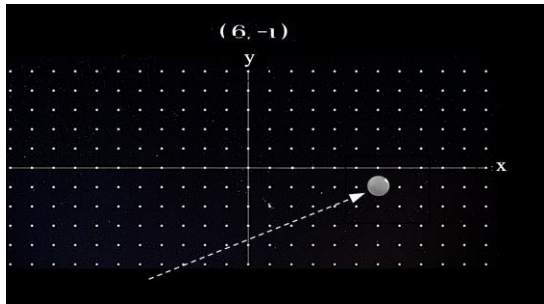
Newton 2.0¹³ 	But : effectuer mentalement l'opération présentée et lancer une balle sur le nombre correspondant au résultat Aménagement matériel : image présentant une opération et six résultats possibles Aménagement humain : pratiquant·e·s face à l'écran, pratique contre un adversaire possible (cf. ci-contre) Variantes : opérations, niveaux de difficulté, etc.
Constello¹⁴  Balle lancée par le·la pratiquant·e	But : trouver un point à partir de ses coordonnées (couple de valeurs) sur un système d'axes orthonormés et lancer une balle sur celui-ci Aménagement matériel : image présentant un système d'axes orthogonaux, un couple de valeurs et une série de points dont l'un correspond à ce couple de valeurs Aménagement humain : pratiquant·e·s face à l'écran, pratique contre un adversaire possible Variantes : valeurs (exclusivement positives ou non), etc.

Fig. 2 : Exemples d'applications de Play Lü® intégrant tâches motrices et numériques

Les cas de Wak et Newton 2.0 peuvent être mis en perspective avec les résultats d'études relatives au mouvement humain et au concept de ligne mentale numérique tel qu'il a été explicité ci-avant (Introduction)¹⁵. De telles études ont d'abord avéré un effet d'interférence d'un mouvement lent et horizontal ou vertical sur l'effectuation d'une tâche numérique concomitante à ce mouvement. Il a ainsi été montré, chez des sujets européens¹⁶, qu'un mouvement de bras vers la gauche ou le bas est défavorable à la réalisation d'une addition mentale, comparativement à un mouvement de bras vers la droite ou le haut (Wiemers, Bekkering & Lindemann, 2014). Plus récemment, dans le cas de mouvements à haute intensité, horizontaux ou verticaux, des résultats ont étayé l'idée d'une focalisation de l'attention sur le plan optimal

¹³ Pour une présentation de Wak, voir : <https://play-lu.com/fr/applications/>

¹⁴ Pour une présentation de Sphynx, voir : <https://play-lu.com/fr/applications/>

¹⁵ Comparer des nombres (Wak) peut conduire à se les représenter mentalement sur une ligne. Effectuer mentalement des opérations (Newton 2.0) peut également s'opérer en appui sur une telle représentation des nombres.

¹⁶ Ces sujets étaient donc habitués à se représenter mentalement les nombres en ordre croissant sur une ligne orientée de gauche à droite ou de bas en haut.

de mouvement¹⁷ suite à une comparaison de nombres, une addition, une soustraction ou une multiplication mentalement effectuée (Khayat et al., 2021).

En pratiquant Wak et Newton 2.0, les sujets enchaînent des comparaisons de nombres ou des opérations. Il est ainsi possible que cela favorise la mobilisation de processus d'attention visuo-spatiale requis par le lancer et que ce mouvement favorise en retour la mobilisation de processus attentionnels requis pour se représenter les nombres et/ou opérer sur eux. Le cas de la détermination de coordonnées dans un système d'axes orthonormés, requise dans Constello et Sphinx, a été sensiblement moins étudié dans ses rapports avec le mouvement humain. L'idée de processus d'attention communs à la spécification d'une abscisse et d'une ordonnée et à la réalisation d'une visée pour lancer une balle sur le point correspondant semble cependant un possible à considérer. Dans ces jeux, il s'agit en effet, à partir d'un couple de valeurs (coordonnées), de déterminer un point sur un système d'axes orthogonaux, l'un étant horizontal et l'autre vertical, projeté sur un mur (Fig. 2). Ce dispositif matériel aide donc à se représenter mentalement les coordonnées à traiter sur deux lignes numériques, l'une horizontale, l'autre verticale. Il pourrait, sur cette base, favoriser la mise en place d'une stratégie permettant de déterminer le point correspondant à ces coordonnées. Il est aussi envisageable que la dynamique de spécification d'un point à partir d'un couple de valeurs (coordonnées) influe sur la réalisation d'une visée pour lancer, conduisant à imaginer celle-là en fonction d'une abscisse et d'une ordonnée, à l'instar d'un geste déictique, ce qui pourrait favoriser la précision du lancer et la spécification d'un point suite à celui-là.

En définitive, on dispose d'indices suggérant que quatre applications de Play Lü® (Wak, Newton 2.0, Constello et Sphinx) intégrant des tâches numériques puissent solliciter une motricité de nature à favoriser une efficacité accrue dans ces tâches numériques. Il en va d'hypothèses qui, si elles sont à vérifier, suggèrent l'intérêt de l'intégration entre tâches numériques et tâches motrices proposées dans ces jeux.

Play Lü, motricité et rotation mentale : développer une capacité utile en mathématiques ?

Si trois applications apparaissent de nature à solliciter la rotation mentale en relation avec la motricité, cette sollicitation n'est pas la même selon qu'il s'agit, d'une part, de Danza ou Gröove, d'autre part, de Puzz (Fig. 3).

Durant une session de Danza ou de Gröove (Fig. 3), chaque pratiquant·e doit reproduire les mouvements d'un avatar qui lui fait face. Dans le cas de mouvements asymétriques, les pratiquant·e·s voient ainsi un avatar qui lève son bras droit effectuer ce mouvement à leur gauche. La rotation mentale est alors potentiellement sollicitée pour « se mettre à la place » de l'avatar ou imaginer l'avatar vu de dos. Dans le cas de Puzz (Fig. 3), la logique est autre puisque les pratiquant·e·s effectuent potentiellement la rotation mentale de fragments d'une image déstructurée (à recomposer) pour déterminer tel fragment à faire tourner via un lancer de balle qui l'atteindrait. Si le recours à la rotation mentale est ici potentiel, il peut être induit moyennant des consignes de jeu¹⁸. En imaginant que de telles consignes soient appliquées, se pose la question de l'effet de ces jeux sur la performance en rotation mentale et des éventuelles répercussions dans la réalisation de tâches de traitement numérique ou d'opérations sur les nombres.

La question des possibilités de transfert d'un acquis dans une tâche de rotation mentale, au-delà de ce type de tâches et des stimuli traités, fait débat même s'il a été montré qu'un tel transfert est possible (e.g.,

¹⁷ Lorsqu'un sujet réalise un mouvement tel qu'un saut vertical, depuis une position statique sur un support horizontal, jambes semi-fléchies et mains sur les hanches, son centre de masse doit idéalement se déplacer dans le plan vertical. On peut ainsi considérer qu'il s'agit ici du plan optimal de mouvement.

¹⁸ Le recours systématique à la rotation mentale n'est pas garanti dans les applications ici considérées. Dans les cas de Danza et Gröove, il est possible de réaliser la tâche via le recours à des règles d'action évitant toute rotation mentale (e.g. : « je réalise à droite ce que je vois réalisé à gauche par l'avatar »). Dans le cas de Puzz, il est possible de pilonner les carrés présentés à l'écran sans stratégie préétablie jusqu'à ce qu'on constate une restructuration de l'image que composent ces carrés. Des consignes de jeu ou des aménagements peuvent cependant induire un recours à la rotation mentale. Ainsi, dans le cas de Danza ou de Gröove, il est possible de demander aux pratiquant·e·s d'agir en s'imaginant à la place de l'avatar.

Wallace & Hofelich, 1992)¹⁹. Cette question est d'autant plus pertinente qu'on peut user de différentes stratégies pour effectuer une rotation mentale (Kosslyn, Ganis & Thompson, 2001), notamment une stratégie visuelle (e.g., imaginer un stimulus tourner sous l'effet de forces extérieures à soi) et une stratégie motrice (e.g., s'imaginer faire tourner soi-même un stimulus).

Or, les travaux de recherche ayant suggéré que la rotation mentale constitue l'une des capacités intellectuelles de base portent essentiellement sur des tâches de rotation mentale bien particulières. Il s'agit de tâches visant à comparer des images de structures composées de cubes ou de carrés (Johnson & Bouchard, 2005), tâches susceptibles de favoriser une stratégie visuelle et qui n'incitent pas à une stratégie motrice (Tomasino & Rumiati, 2013).

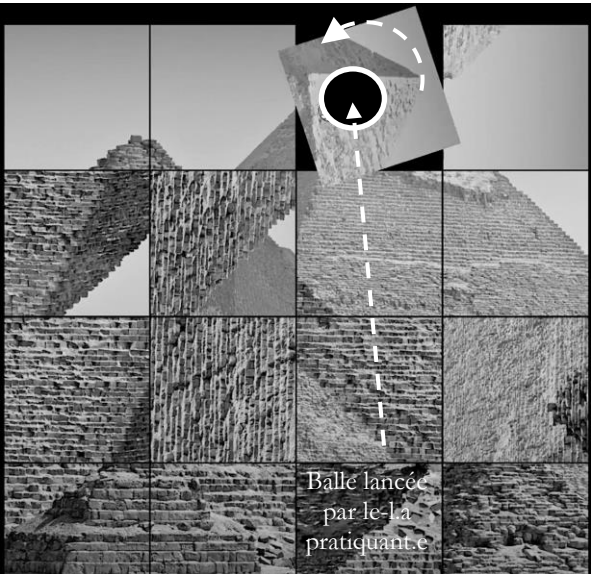
Application Gröove ²⁰	
	But : reproduire les mouvements montrés à l'écran
	Aménagement matériel : image animée présentant une chorégraphie projetée sur un écran de 6 m x 3 m
	Aménagement humain : pratiquant·e·s face à l'écran
	Variantes : différentes chorégraphies, différents tempos, etc.
Application Puzz	
	But : recomposer une image (ci-contre, un paysage avec deux pyramides) à partir de fragments de cette image placés au bon endroit, mais mal orientés
	Aménagement matériel : image fragmentée en carrés dont les orientations respectives déstructurent l'image, les carrés tournant d'un quart de tour (toujours dans le même sens) lorsqu'ils sont touchés par une balle
	Aménagement humain : possibilité de pratiquer seul·e ou à plusieurs en mode coopératif ou compétitif (plusieurs images possibles en parallèle)
	Variantes : différentes images à recomposer

Fig. 3 : Exemples d'applications de Play Lü® intégrant tâches motrices et rotation mentale

¹⁹ Wallace et Hofelich (1992) ont avéré l'effet positif d'un entraînement en rotation mentale à partir de formes dissymétriques sur l'efficacité à réaliser des tâches dites d'analogie géométrique. Dans ces tâches, un premier dessin représentait une situation initiale, par exemple, un cercle au-dessus duquel un rectangle noir était placé. Un deuxième dessin représentait une transformation du précédent : le rectangle noir était par exemple placé à l'intérieur du cercle (transformation « move ») et dédoublé (transformation « add »), le double étant coloré en blanc (transformation « shading »). Une troisième image exposait une nouvelle situation initiale, par exemple, un hexagone et, au-dessus de celui-là, un demi-disque noir. Les sujets devaient identifier la transformation dont rendaient compte les deux premières images et procéder par analogie pour déterminer quelle image correspondrait à la transformation de la troisième.

²⁰ Pour une présentation de Danza, voir : <https://play-lu.com/fr/applications/>

Dans les cas de Danza et Gröëve, il peut sembler qu'on place les pratiquant·e·s dans des contextes d'exercice de la rotation mentale différents de ceux mentionnés ci-dessus. Dans ces deux jeux, les stimuli sont des avatars de danseurs. Les tâches à réaliser (reproduire les mouvements d'un avatar) peuvent en outre susciter une identification à l'avatar favorisant une stratégie motrice. Pour autant, des travaux ont montré que la pratique d'activités physiques sollicitant les capacités spatiales, e.g., la lutte, suscite un progrès significatif dans des tâches de rotation mentale appelant à comparer des structures à base de cubes (e.g., Habacha, Lejeune-Poutrain, Margas & Molinaro, 2014). On dispose en outre de résultats indiquant qu'il pourrait en être de même de la pratique de la danse (e.g., Jansen, Kellner & Rieder, 2013)²¹. Il est ainsi envisageable que la pratique des JVA Danza ou Gröëve suscite un progrès dans des tâches de rotation mentale requérant la comparaison de dessins de structures composées de cubes. Il est en outre possible que ce progrès impacte positivement la réalisation de tâches numériques puisqu'un lien entre la performance dans le type de tâches de rotation mentale ici considéré et différentes tâches numériques a été avéré (e.g., Thompson et al., 2013).

L'application Puzz utilise également des tâches et stimuli différents de ceux exploités dans les tests de ce type. On ne dispose en outre pas de repère qui aiderait à envisager les possibles effets de transfert d'un acquis en rotation mentale dans le cadre de Puzz. On ne peut donc ici guère que considérer ces effets en tant que possibles appelant une vérification.

En définitive, Play Lü® propose, avec Danza, Gröëve et Puzz, trois applications pouvant favoriser un progrès en rotation mentale. Les effets de transfert d'un acquis dans les tâches proposées par ces jeux sur des tâches de rotation mentale classiquement associées à la performance intellectuelle semblent possibles même s'ils demeurent à vérifier. Similairement, l'impact de la pratique de ces applications sur la réalisation de tâches de traitement numérique ou d'opérations sur les nombres est à vérifier, des effets positifs étant crédibles (Fargier et al., 2016).

PERSPECTIVES

On dispose d'indications suggérant que sept JVA proposés par la plateforme Play Lü® puissent présenter un intérêt pour ce qui est des mathématiques. Au-delà d'un classique impact sur l'engagement des pratiquant·e·s, les mouvements mobilisés durant ces JVA pourraient aider à réaliser une tâche numérique ou à progresser en rotation mentale. Les analyses développées dans le présent article suggèrent en tout état de cause l'intérêt de développer des connexions entre éducation physique et mathématiques à l'école, plaidant ainsi en faveur d'une réflexion à la mise en place de croisements entre domaines tels que le Plan d'Études Romand l'a esquissée.

Il convient certes de mettre les hypothèses présentées à l'épreuve des faits, ce qu'a notamment favorisé un soutien de la Haute École Pédagogique du canton de Vaud via son fonds de réserve et d'innovation (FRI). En ce sens, une étude des effets conjoints de Constello et Sphynx sur la précision en lancer de balle et sur la détermination d'un point à partir de ses coordonnées dans un système d'axes orthonormés a ainsi été effectuée. Les résultats, indiquant un effet positif de ces JVA sur la l'identification d'un point dans un système orthonormé et sur la précision en lancer de balle, sont en cours de valorisation²². Une étude de l'impact d'une pratique de Gröëve sur les résultats à un test de rotation mentale avec des structures à base de cubes comme stimuli et à une série de tests intéressant les mathématiques (comparaison de nombres et

²¹ Dans cette étude, les auteurs ont montré un effet positif de la pratique de la danse par de jeunes enfants sur le score à un test de rotation mentale. Il s'agit du « *Pet Mental rotation Test* » dont chaque item présente un dessin (animal) de référence sur le côté gauche d'une feuille avec, à sa droite, quatre dessins dont deux correspondent au dessin de référence après rotation dans le plan contenant l'image et deux autres, à des images en miroir de cette référence. Le sujet doit trouver les deux dessins identiques au dessin de référence. On a ainsi un test dont le design est similaire à celui du classique test de Vandenberg et Kuse (1978) dont les stimuli sont des images de structures à base de cubes.

²² Ont participé à cette étude, dans le cadre du projet « Lü Move_&_Learn », par ordre alphabétique : Magali Bovas, Valerian Cécé, Etienne Chabloz, Patrick Fargier, Guillaume Girod, Vanessa Lentillon-Kaestner, Cédric Roure, Jimmy Serment, Benoît Tonetti.

de collections de points, addition, soustraction et multiplication mentale, positionnement d'un nombre sur un segment de droite borné par des valeurs, détermination du nombre correspondant à une marque sur un tel segment) est en outre en cours au moment où est rédigé le présent article²³.

BIBLIOGRAPHIE

- Arsalidou, M., Pawliw-Levac, M., Sadeghi, M. & Pascual-Leone, J. (2018). Brain areas associated with numbers and calculations in children: Meta-analyses of fMRI studies. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 30, 239-250. <https://dx.doi.org/10.1016/j.dcn.2017.08.002>
- Cheng, Y.-L. & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, 15(1), 2-11. <https://dx.doi.org/10.1080/15248372.2012.725186>
- Dehaene, S., Bossini, S. & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371-396. <https://dx.doi.org/10.1037//0096-3445.122.3.371>
- Fargier, P., Bal, O. & Massarelli, R. (2016). Mental rotation and mathematical Abilities – Effect of Physical Education. Dans L. Gómez Chova, A. López Martínez, & I. Candel Torres (dir.), *EDULEARN16 Proceedings* (pp. 2667- 2674). IATED Academy.
- Fischer, M. H. & Shaki, S. (2018). Number concepts: abstracts and embodied. *Philosophical Transactions B*, 373, 1752. <https://dx.doi.org/10.1098/rstb.2017.0125>
- Goldin-Meadow, S., Cook, S. W. & Mitchell, Z. A. (2009). Gesturing gives children new ideas about math. *Psychological Science*, 20(3), 267-272. <https://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9280.2009.02297.x>
- Greene, R. L. (2008). Repetition and spacing effects. Dans H. L. Roediger (dir.), *Learning and memory: A comprehensive reference. Vol. 2: Cognitive psychology of memory* (pp. 65-78). Oxford, England: Elsevier.
- Habacha, H., Lejeune-Poutrain, L., Margas, N. & Molinaro, C. (2014). Effects of the axis of rotation and primordially solicited limb of high level athletes in a mental rotation task. *Human Movement Science*, 37, 58-68. <https://dx.doi.org/10.1016/j.humov.2014.06.002>
- Hanakawa, T., Honda, M., Sawamoto, N., Okada, T., Yonekura, Y., Fukuyama, H. & Shibasaki, H. (2002). The role of rostral Brodmann area 6 in mental-operation tasks: An integrative neuroimaging approach. *Cerebral Cortex*, 12(11), 1157-1170. <https://dx.doi.org/10.1093/cercor/12.11.1157>
- Hoyek, N., Champely, S., Collet, C., Fargier, P. & Guillot, A. (2014). Is mental rotation ability a predictor of success for motor performance? *Journal of Cognition and Development*, 15, 495-505. <https://dx.doi.org/10.1080/15248372.2012.760158>
- Jansen, P., Kellner, J. & Rieder, C. (2013). The improvement of mental rotation performance in second graders after creative dance training. *Creative Education*, 4(6), 418-422. <http://dx.doi.org/10.4236/ce.2013.46060>
- Johnson, W. & Bouchard, T. J. (2005). The structure of human intelligence: It is verbal, perceptual, and image rotation (VPR), not fluid and crystallized. *Intelligence*, 33, 393-416. <https://dx.doi.org/10.1016/j.intell.2004.12.002>
- Khayat, J., Champely, S., Diab, A., Rifai Sarraj, A. & Fargier, P. (2019). Effect of mental calculus on the performance of complex movements. *Human Movement Science*, 66, 347-354. <https://dx.doi.org/10.1016/j.humov.2019.05.008>

²³ Participent à cette étude dans le cadre du projet « Lūmens » : Magali Bovas, Nicolas Burel, Valérian Cécé, Patrick Fargier, Guillaume Girod, Vanesa Lentillon-Kaestner, Cédric Roure, Jimmy Serment.

- Khayat, J., Champely, S. Diab, A., Rifai Sarraj, A. & Fargier, P. (2021). Effect of mental calculation and number comparison on a manual-pointing movement. *Motor Control*, 25(1), 44-58. <https://dx.doi.org/10.1123/mc.2019-0071>
- King, D., Delfabbro, P. & Griffiths, M. (2010). Video game structural characteristics: A new psychological taxonomy. *International Journal of Mental Health and Addiction*, 8(1), 90-106. <https://dx.doi.org/10.1007/s11469-009-9206-4>
- Knops, A. (2018). Neurocognitive evidence for spatial contributions to numerical cognition. Dans A. Henik & W. Fias (dir.), *Heterogeneity of Function in Numerical Cognition* (pp. 211-232). Elsevier Academic Press. <https://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-811529-9.00011-X>
- Knops, A., Viarouge, A. & Dehaene, S. (2009). Dynamic representations underlying symbolic and nonsymbolic calculation: Evidence from the operational momentum effect. *Attention Perception and Psychophysics*, 71(4), 803-821. <https://dx.doi.org/10.3758/APP.71.4.803>
- Kosslyn, S. M., Ganis, G. & Thompson, W. L. (2001). Neural foundations of imagery. *Nature Reviews Neuroscience*, 2, 635-642, <https://dx.doi.org/10.1038/35090055>
- Moss, T., Feltz, D. L., Kerr, N. L., Smith, A. L., Winn, B. & Spencer, B. (2018). Intergroup competition in exergames: Further tests of the Köhler effect. *Games for Health Journal*, 7(4), 240-245. <https://dx.doi.org/10.1089/g4h.2017.0122>
- Nilges, L. & Usnick, V. (2000). The role of spatial ability in physical education and mathematics. *Journal of Physical Education, Recreation and Dance*, 71(6), 29-33. <https://dx.doi.org/10.1080/07303084.2000.10605158>
- Penner-Wilger, M., Waring, R. J. & Newton, A. T. (2014). Subitizing and finger gnosis predict calculation fluency in adults. Dans P. Bello, M. Guarini, M. McShane, & B. Scassellati (dir.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1150-1155). Austin, TX: Cognitive Science Society.
- Soylu, F., Raymond, D., Gutierrez, A. & Newman, S. D. (2017). The differential relationship between finger gnosis, and addition and subtraction: An fMRI study. *Journal of Numerical Cognition*, 3, 694-715. <https://dx.doi.org/10.5964/jnc.v3i3.102>
- Thompson, J. M., Nuerk, H.-C., Moeller, K. & Kadosh, R. C. (2013). The link between mental rotation ability and basic numerical representations. *Acta Psychologica*, 144, 324-331. <https://dx.doi.org/10.1016/j.actpsy.2013.05.009>
- Tomasino, B. & Rumiati, R. I. (2013). At the mercy of strategies: The role of motor representations in language understanding. *Frontiers in Psychology*, 4, 235-247. <https://dx.doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00027>
- Vandenberg, S. G. & Kuse, A. R. (1978). Mental rotations, a group of three-dimensional spatial visualization. *Perceptual and Motor Skills*, 47, 599-604. <https://dx.doi.org/10.2466/pms.1978.47.2.599>
- Voyer, D., Voyer, S. & Bryden, M. P. (1995). Magnitude of sex differences in spatial abilities: A meta-analysis and consideration of critical variables. *Psychological Bulletin*, 117, 250-270. <https://dx.doi.org/10.1037/0033-2909.117.2.250>
- Wallace, B. & Hofelich, B. G. (1992). Process generalization and the prediction of performance on mental imagery tasks. *Memory and Cognition*, 20(6), 695-704. <https://dx.doi.org/10.3758/BF03202719>
- Wiemers, M., Bekkering, H. & Lindemann, O. (2014). Spatial interferences in mental arithmetic: Evidence from the motion-arithmetic compatibility effect. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67(8), 1557-1570. <https://dx.doi.org/10.1080/17470218.2014.889180>
- Wisniewski, B., Zierer, K. & Hattie, J. (2020). The power of feedback revisited: A meta-analysis of educational feedback research. *Frontiers in Psychology*, 10, 3087. <https://dx.doi.org/10.3389/fpsyg.2019.03087>



Zebian, S. (2005). Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: The SNARC effect and the REVERSE SNARC effect in English and Arabic monoliterates, biliterates, and illiterate Arabic speakers. *Journal of Cognition and Culture*, 5(1-2), 165-190. <https://dx.doi.org/10.1163/1568537054068660>

DÉCONCERTANT HASARD

Michel Brêchet

Enseignant

Mots clé : probabilités, logique, didactique, résolution de problèmes

Résumé : Les probabilités sont d'un bon secours pour se positionner face à l'imprévu et aux coïncidences. Elles réservent toutefois quelques surprises. Confrontée à une situation probabiliste, notre intuition est souvent mauvaise conseillère. D'où l'importance, au cours de l'éducation mathématique, de bien appréhender les tenants et les aboutissants du hasard.

INTRODUCTION

En Suisse romande, le comportement du hasard est abordé au cycle 3 de la scolarité obligatoire. En 10H et 11H, dans l'axe thématique Nombres et Opérations du Plan d'Etudes Romand (CIIP, 2010), il est précisé dans la progression des apprentissages « Exploration de situations aléatoires » et, en 11H pour les élèves de niveaux 2 et 3, « Traitement de situations aléatoires à l'aide de notions de probabilités ». Quant aux commentaires didactiques relatifs à la 11H figurant dans les Moyens d'Enseignement Romands (MER), ils précisent entre autres que :

... dans ces activités, on ne demande jamais explicitement la probabilité d'un événement. En 10^e, on s'est contenté de rester sur des expressions du type « On a X chances sur Y d'obtenir ce résultat ». Les élèves ont perçu que « X » correspond au nombre de cas favorables et « Y » au nombre de cas possibles. En 11^e, on continue bien sûr de travailler sur l'approche « probabiliste ». Par contre, on introduit l'expression « La probabilité d'un événement » qui remplace l'expression « On a X chances sur Y d'obtenir ce résultat »¹.

ASPECTS DIDACTIQUES

La plupart des activités figurant dans les MER invitent à dénombrer les résultats favorables et ceux qui sont possibles, la probabilité d'un événement étant définie dans l'Aide-mémoire (CIIP, 2019) de la collection comme le quotient $\frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}}$, définition qui ne peut bien entendu être appliquée que si les résultats d'une situation aléatoire sont équiprobables. Le dénombrement constitue donc la tâche principale des élèves. Pour être mené à bien, il nécessite de la rigueur, une organisation rationnelle de la recherche effectuée et de la persévérance.

Par exemple, la recherche de tous les résultats pouvant se présenter lors du lancer de 3 pièces de monnaie peut s'appuyer sur :

- la manipulation physique des pièces ;
- des dessins comme $\textcircled{P}\textcircled{P}\textcircled{P}$ $\textcircled{F}\textcircled{F}\textcircled{F}$ $\textcircled{P}\textcircled{P}\textcircled{F}$...
- l'énumération sous forme de liste : PPP, FFF, PPF ...

¹ <https://e.maths-m.ch/contenu/com/index.php?file=11NOLEp33com.pdf>

- la présentation dans un tableau :

Pièce 1	P							
	F							
Pièce 2	P							
	F							
Pièce 3	P							
	F							

Fig. 1 : Tableau à double entrée

- l'utilisation d'un diagramme en arbre :

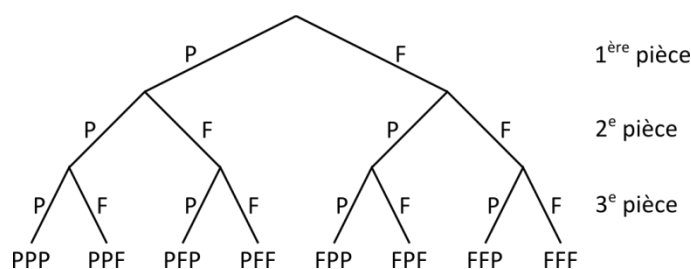


Fig. 2 : Arbre de classement

Une erreur rencontrée fréquemment lors des premiers pas dans l'étude des probabilités est de prétendre qu'il n'y a que 4 cas possibles et non 8 :

3 pile - 2 pile et 1 face - 1 pile et 2 face - 3 face

L'enseignant pourra y remédier en attribuant des couleurs aux pièces, par exemple une jaune, une rouge et une bleue. Ainsi, si chacun des cas « 3 pile » et « 3 face » ne peuvent survenir que d'une seule façon, il y a trois façons différentes d'obtenir « 2 pile et 1 face » (de même que pour « 1 pile et 2 face ») :



Fig. 3 : Les 3 façons d'aboutir à « 2 pile et 1 face »

Les couleurs sont utiles ici pour rendre le raisonnement plus accessible.

Toujours au plan didactique, il s'agit de ne pas inciter les élèves de l'école obligatoire à résoudre les problèmes rencontrés par l'application de formules (par exemple celles enseignées au lycée qui donnent le nombre d'arrangements ou de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments) ou de calculs (comme celui qui permet de trouver la probabilité d'obtenir un « six » ou le côté « pile » lors du lancer d'un dé conventionnel et d'une pièce de monnaie, $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$ pour information). Ces méthodes sont très efficaces, mais il est délicat de savoir laquelle utiliser dans une situation probabiliste donnée. Seule une certaine aisance permet de ne pas se tromper. Elles sont donc à réserver prioritairement aux étudiants du secondaire 2 et du tertiaire.

De mon point de vue, suite à de multiples séquences d'enseignement traitant des situations aléatoires, les leçons fondées sur des activités où l'expérimentation est possible se déroulent habituellement bien et sont porteuses de sens pour les élèves lorsqu'elles sont articulées autour du scénario suivant :

1. Prévisions a priori, orales ou écrites, pour faire émerger les conceptions des élèves, correctes ou erronées ;
2. Débat au sein de la classe, afin de mettre en exergue les arguments de chacun et de tester leur solidité ;

3. Expérimentation, avec des cartes, des dés, des pièces de monnaie... en veillant que chaque jet, chaque tirage soit indépendant du précédent afin d'être certain que le hasard mène bien la danse ;
4. Recensement des résultats obtenus, nombreux si possible, afin que la loi des grands nombres puisse se manifester ; attention aux biais liés à la taille de l'échantillon : si celui-ci est trop petit, les résultats obtenus risquent de s'écarter des rapports recherchés ;
5. Calculs des fréquences d'apparition empiriques, à exprimer en % ou par un nombre réel compris entre 0 et 1 ; à noter ici que les activités à privilégier sont celles dont les solutions sont des probabilités « simples » et « distantes » l'une de l'autre, comme $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{8}$ et non comme $\frac{4}{27}$ et $\frac{5}{27}$ qui ne peuvent être mises en évidence expérimentalement qu'au prix d'un très grand nombre de jets ou de tirages ;
6. Analyse théorique, c'est-à-dire calcul des probabilités puis comparaison de celles-ci avec les fréquences empiriques.

Ouvrons une petite parenthèse informatique. Les fréquences empiriques peuvent aussi être le fruit de la programmation d'une feuille de calcul (Excel ou LibreOffice). Par exemple, pour simuler des lancers d'une pièce de monnaie, aussi nombreux que souhaités, on peut programmer les cellules comme suit :

- `=SI(ALEA()<0.5;"P";"F")` pour obtenir P (pile) ou F (face) dans chaque cellule sélectionnée ;
- `=NB.SI(A1:A10000;"P")` pour compter le nombre de cellules contenant la lettre P à l'intérieur d'une plage donnée, ici la plage A1:A10000, soit une plage correspondant à 10'000 lancers d'une pièce, et enfin diviser ce nombre par 10'000 pour trouver la fréquence d'apparition de P.

EVIDENT OU ÉTRANGE ?

L'étude des situations aléatoires a ceci d'intéressant qu'elle vise également à forger l'esprit scientifique des élèves, à les amener sur le chemin du doute, de l'inédit, à les contraindre à remettre en question certaines de leurs intuitions. Dans ce domaine, elles sont fortes et bien tenaces, mais malheureusement elles sont souvent fausses. Les adultes n'échappent d'ailleurs pas à ce phénomène. Qui n'a jamais constaté que le hasard est un hôte indésirable de la pensée humaine, qui préfère les certitudes ? Hum... très inconfortable ce hasard ! Ainsi, quelques activités des MER conduisent à des résultats surprenants, qui semblent paradoxaux à première vue, mais qui, après analyse, reflètent bien la réalité. On peut citer par exemple dans le Livre 11^e *NO117 Mâle ou femelle ?*, *NO124 Quelle stratégie ?* ou encore *NO125 Dés intransitifs*. Ces problèmes, sans examens détaillés et exhaustifs, conduiront certainement à des erreurs de jugement. Pour illustrer ce propos, voyons trois problèmes semblables à l'histoire des perroquets du *NO117*. Ils ont pour thème un couple et leurs deux enfants. Il est supposé qu'à la naissance les garçons et les filles sont équiprobables, que les sexes des enfants soient des variables aléatoires indépendantes et que les enfants soient d'un sexe ou de l'autre.

1. Un couple a deux enfants, dont l'un au moins est une fille.

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Une attitude courante consiste à se dire que si l'un des enfants est une fille, l'autre est soit une fille soit un garçon. Ce raisonnement erroné débouche sur une probabilité de $\frac{1}{2}$ (FF ou FG). Mais quand on dit que « l'un au moins est une fille », il peut s'agir du premier ou du deuxième enfant. Quatre possibilités surviennent lors de deux naissances :

FF - FG - GF - GG

Toutefois, comme l'énoncé précise qu'il y a au moins une fille, le cas GG est exclu et il reste trois cas équiprobables. Comme il n'y a qu'un seul FF parmi eux, la probabilité que les deux enfants soient des filles est de $\frac{1}{3}$. Cette situation peut être illustrée par le tableau ci-dessous. Seules les cases grises (au moins une fille) sont à prendre en considération. Et seule la case contenant une croix satisfait à la condition « les deux enfants sont des filles ».

	1 ^{er} enfant	
	F	G
2 ^e enfant F	X	
2 ^e enfant G		

Fig. 4 : Au moins une fille

En classe, après avoir laissé un temps de réflexion aux élèves afin qu'ils puissent résoudre ce problème, l'enseignant pourra former des binômes d'élèves puis :

- demander qu'un membre du binôme lance simultanément deux pièces de monnaie (pile pour garçon et face pour fille) et que l'autre note les résultats obtenus dans un tableau (voir figure 5), pendant un temps donné (10-15 minutes) afin d'avoir un grand nombre de résultats ;

Nombre de lancers (hormis configuration GG)	...
Nombre de configurations FF	...

Fig. 5 : Exemple de tableau des résultats

- recenser les résultats obtenus par tous les binômes, dans un tableau analogue à celui-ci-dessus ;
- calculer la fréquence d'apparition (en %) des configurations FF.
- Cette expérimentation permettra de vérifier que FF apparaît environ une fois sur trois. Comme dit précédemment, ce rapport est « simple » et peut donc être bien mis en évidence.

2. Un couple a deux enfants, dont le premier est une fille.

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Ici c'est plus simple. Vu que le premier enfant est une fille, l'autre a autant de chances d'être un garçon qu'une fille. FF et FG sont les deux cas possibles, et seul FF répond à la demande, d'où la probabilité de $1/2$, comme le montre également ce diagramme :

	1 ^{er} enfant	
	F	G
2 ^e enfant F	X	
2 ^e enfant G		

 Fig. 6 : Le 1^{er} enfant est une fille

3. Un couple a deux enfants, dont l'un au moins est une fille née un mardi.

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Dans cette nouvelle version, de prime abord, le jour de naissance de la fille paraît sans intérêt, mais attention aux pièges d'une réflexion trop hâtive ! On nage en plein cœur du domaine contre-intuitif de la probabilité conditionnelle, qui est la probabilité d'un événement (ici deux filles) après qu'un autre événement s'est déjà produit (ici la naissance d'une des filles un mardi).

Une des difficultés majeures de ce problème consiste à identifier tous les cas pouvant se présenter. Aux élèves bloqués, l'enseignant pourra conseiller en guise de relance de dresser méthodiquement la liste de ces cas. Au besoin il en établira l'amorce avec eux. Il rappellera en outre avantageusement que la

première phrase de l'énoncé n'exclut pas que les deux enfants soient des filles nées un mardi (**FMa**), et qu'il s'agit de tenir compte du jour de naissance de chaque enfant lors de la recherche. On obtient alors 14 cas ($2 \cdot 7$) si le premier enfant est une fille née un mardi : **FMaFLu** - **FMaFMa** - **FMaFMe** - **FMaFJe** - **FMaFVe** - **FMaFSa** - **FMaFDi** - **FMaGLu** - **FMaGMa** - **FMaGMe** - **FMaGJe** - **FMaGVe** - **FMaGSa** - **FMaGDi**, et donc 14 également si le deuxième enfant est une fille née un mardi (**FLuFMa** - **FMaFMa** - **FMeFMa** - ...). D'où l'erreur bien connue d'aboutir à la conclusion qu'il y a $14 + 14 = 28$ cas possibles. En fait il n'y en a que 27, car la configuration **FMaFMa** apparaît à deux reprises. Reste à repérer dans cette liste tous les cas favorables, à savoir les cas où les deux enfants sont des filles (il y en a 13), et à calculer la probabilité demandée ($13/27$) en appliquant la formule usuelle.

Représenter cette situation de façon analogue aux deux exemples précédents apportera sans doute un éclairage bienvenu :

		1 ^{er} enfant													
		fille							garçon						
		Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
2 ^e enfant	fille	Lu		X											
		Ma	X	X	X	X	X	X							
		Me		X											
		Je		X											
		Ve		X											
		Sa		X											
		Di		X											
garçon		Lu													
		Ma													
		Me													
		Je													
		Ve													
		Sa													
		Di													

Fig 7 : Au moins une fille née un mardi

Seules les $7 \cdot 4 - 1 = 27$ cases grises (au moins une fille née un mardi) sont à considérer et seules les $7 \cdot 2 - 1 = 13$ cases marquées d'une croix conduisent à « deux filles », d'où la probabilité de $13/27$, car tous les carreaux sont équiprobables. Et donc le jour de naissance a son importance, ce qui était difficile à prédire !

En fait, la connaissance du jour de naissance pour l'une des filles contribue à améliorer la distinction entre les deux filles et modifie ainsi la probabilité conditionnelle. Et plus l'information supplémentaire apportée est précise, plus la probabilité que les deux enfants soient des filles s'approche de $1/2$:

- si on ne sait pas quel enfant est la fille, la probabilité est de $\frac{1}{3}$;
- si une des filles est née au printemps (il y a 4 saisons), la probabilité est de $\frac{4 \cdot 2 - 1}{4 \cdot 4 - 1} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{7}{15}$;
- si une des filles est née un mardi (7 jours dans la semaine), la probabilité est de $\frac{7 \cdot 2 - 1}{7 \cdot 4 - 1} = \frac{2 - \frac{1}{7}}{4 - \frac{1}{7}} = \frac{13}{27}$;
- si une des filles est née à Noël (365 jours dans l'année), la probabilité est de $\frac{365 \cdot 2 - 1}{365 \cdot 4 - 1} = \frac{2 - \frac{1}{365}}{4 - \frac{1}{365}} = \frac{729}{1459}$;

- si on sait que le premier enfant est une fille, la probabilité est de $\frac{1}{2}$.

On a bien $\frac{1}{3} < \frac{7}{15} < \frac{13}{27} < \frac{729}{1459} < \frac{1}{2}$.

Dans les égalités ci-dessus, les fractions $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{365}$ correspondent aux probabilités respectives de naître à une saison donnée, à un jour de la semaine donné ou à une date donnée. D'une manière générale, en appelant c la probabilité de satisfaire à une condition donnée, le résultat recherché est $\frac{2-c}{4-c}$. Décidément le monde des probabilités conditionnelles réserve de belles surprises !

Voici encore quatre problèmes (peut-être les connaissez-vous) qui montrent volontiers que l'être humain a une perception fluctuante et imprécise du hasard. Si le cœur vous en dit, vous pouvez y réfléchir et chercher leurs solutions. Des aides à la résolution sont dissimulées sous chaque problème. Un prochain numéro de RMé vous livrera tous leurs secrets.

Bonne réflexion.

Les 3 boîtes

Dans une boîte sont cachées deux pièces d'or, dans une autre deux pièces d'argent et dans la troisième une d'or et une d'argent. Votre main retire une pièce d'or d'une boîte.

Quelle est la probabilité que la pièce restante soit d'argent ?

Les 3 cartes²

Pauline possède les trois cartes suivantes :

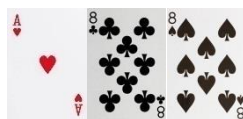


Fig. 8 : As de cœur, 8 de trèfle, 8 de pique

Elle les mélange puis les retourne (faces cachées). Elle demande alors à Marc de deviner où se trouve l'as de cœur. Pauline, qui sait où est l'as de cœur, ne retourne pas la carte montrée par Marc.

Pauline retourne alors l'une des deux cartes autre que celle qui a été choisie par Marc et autre que l'as de cœur. Elle retourne donc soit la 8 de trèfle, soit la 8 de pique.

Marc souhaite trouver l'as de cœur. Pauline, fort sympathique, lui permet de maintenir son premier choix (la carte qu'il avait montrée) ou de le modifier (montrer l'autre carte).

Que lui conseillez-vous de faire ?

² Ce problème est identique au NO124 Quelle stratégie ? cité plus haut, ainsi qu'au jeu télévisé Let's make a deal.

Pile ou face

Deux joueurs A et B s'affrontent dans une série de lancers de pièce de monnaie.

A gagne si, dans la série, la configuration PPF (pile, pile, face) apparaît avant la configuration FPP (face, pile, pile).

B gagne si, dans la série, la configuration FPP apparaît avant la configuration PPF.

Le jeu s'arrête dès qu'un joueur gagne, soit après 3 lancers au minimum.

Par exemple, dans la série ci-dessous, c'est le joueur B qui gagne :



Le jeu est-il équilibré ?

Le test

Un test de dépistage d'une infection est à l'étude :

- il y a 4% de risques qu'une personne soit atteinte par l'infection ;
- si elle est atteinte par l'infection, il y a 75% de risques qu'elle ait une réaction positive au test ;
- si elle est épargnée par l'infection, il y a encore 12,5% de risques qu'elle ait une réaction positive au test.

Pierre a une réaction positive au test.

Quelle est la probabilité qu'il soit atteint par l'infection ?

BIBLIOGRAPHIE

Bronner, G. (2007). Coïncidences, Vuibert.

CIIP. (2010). *Plan d'étude romand*. <https://www.cip-esper.ch/#/>

CIIP. (2013). *Mathématiques 9-10-11, Livre 11^e*, LEP

CIIP. (2019). *Mathématiques 9-10-11, Aide-mémoire*, LEP.

Gauvrit, N. (2009). *Vous avez dit hasard ?* Belin.

Stewart, I. (2020). *Les dés jouent-ils aux dieux ?* Dunod.

RMÉ POUR CELLES EST CEUX QUI
S'INTÉRESSENT À L'ENSEIGNEMENT DES
MATHÉMATIQUES !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.revue-mathematiques.ch, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 1 depuis la rubrique *Consultation*.

Contact : revue.mathematiques@gmail.com

Site internet : www.revue-mathematiques.ch

Fondateur

Samuel Roller

Comité éditorial

Valérie Batteau
Cédric Béguin
Charlotte Bertin
Julie Candy
Sylvia Coutat
Stéphanie Dénervaud
Thierry Dias
Céline Vendeira Maréchal
Laura Weiss

Comité de rédaction

Luc Olivier Bünzli (HEP Vaud)
Pierre François Burgermeister (Université de Genève)
Maud Chanudet (Université de Genève)
Stéphane Clivaz (HEP Vaud)
Alain Collioud (HEP BEJUNE)
Sylvie Coppé (Université de Genève)
Audrey Daina (HEP Vaud)
Mickael Da Ronch (HEP Valais)
Christine Del Notaro (Université de Genève)
Michel Déruaz (HEP Vaud)
Marina De Simone (Université de Genève)
Jean-Luc Dorier (Université de Genève)
Nicolas Dreyer (HEP Fribourg)
Stéphane Favier (Université de Genève)
Marie-Line Gardes (HEP Vaud)
Franscesca Gregorio (HEP Vaud)
Claude Hauser (HEP BEJUNE)
Jana Lackova (Université de Genève)
Ismail Mili (HEP Valais)
Sarah Presutti (HEP Vaud)

Maquette

Sylvia Coutat