RMé 243

243

RMé

REVUE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE

Juin 2025

ISSN : 2571-516X

SOMMAIRE

INTRODUCTION DE L'ALGEBRE EN 9H AVEC DES PROBLEMES DE PREUVES

Amine Slim et Sylvie Coppé

Enseignant au Secondaire 1 – Établissement Léon-Michaud et Université de Genève

Résumé : Cet article constitue la suite de celui paru dans cette revue (Slim & Coppé, 2025) dans lequel nous relations une expérimentation, faite en 9H dans une classe du canton de Vaud, ayant pour but de donner du sens aux concepts algébriques. Nous avons élaboré une séquence d'enseignement sur l'introduction de l'algèbre en utilisant des problèmes de généralisation puis des problèmes de preuves basés notamment sur des programmes de calcul. Dans cette partie, nous allons particulièrement analyser les productions des élèves sur ces problèmes de preuves.

Mots clés : algèbre élémentaire, problèmes de preuve, programmes de calcul, distributivité de la multiplication sur l'addition, preuves pragmatiques/intellectuelles.

INTRODUCTION

Cet article fait suite à celui publié dans cette revue (Slim & Coppé, 2025), qui portait sur une expérimentation réalisée dans une classe de 9H du canton de Vaud. Cette expérimentation visait à élaborer une séquence pour introduire l'algèbre en donnant du sens aux concepts algébriques en permettant aux élèves de comprendre l'utilité de l'algèbre à la fois pour généraliser des situations et pour établir des preuves. Dans un premier article, nous avons analysé les productions d'élèves sur des problèmes de généralisation, ce qui nous a permis de conclure au potentiel didactique de ces problèmes. De la même façon, nous nous intéressons ici à l'analyse des productions des élèves sur des problèmes de preuve.

L'algèbre introduit des formes d'abstraction qui nécessitent un passage d'une pensée empirique et procédurale à une pensée structurale et déductive (Sfard, 1991). Autrement dit, les élèves passent d'une réflexion principalement basée sur des exemples concrets à une réflexion permettant d'identifier, de comprendre et de manipuler des concepts abstraits, de percevoir les relations entre les objets algébriques, et d'utiliser un raisonnement logique rigoureux pour généraliser et justifier leurs résultats.

L'apprentissage de la preuve en mathématiques, notamment lors de l'introduction à l'algèbre, se situe à la croisée de plusieurs enjeux didactiques majeurs. Selon Balacheff (1987), ce processus est marqué par la nécessité d'instaurer des outils cognitifs pour généraliser les régularités et valider les conjectures. En Suisse romande, dans le Plan d'Études Romand, la preuve est un axe du développement des compétences algébriques, visant à doter les élèves de méthodes de raisonnement rigoureuses tout en leur permettant d'accéder à une compréhension plus abstraite des objets mathématiques.

Dans cet article, nous examinons les résultats obtenus par 24 élèves de 9H confrontés à des problèmes basés sur des programmes de calcul, où l'objectif est de les amener à formuler des conjectures et à les démontrer. Nous nous posons la question suivante : dans quelle mesure les élèves sont-ils capables de mobiliser des procédures de preuve pour démontrer un résultat général et quelles sont-elles ? Les résultats offrent une perspective sur les défis spécifiques auxquels les élèves sont confrontés lorsqu'ils doivent conceptualiser des objets algébriques abstraits dans le cadre de la résolution de problèmes. En outre, ces résultats fournissent des pistes pour améliorer l'enseignement de l'algèbre en intégrant plus étroitement les concepts de généralisation et de preuve dans les apprentissages.

Cet article se structure en cinq parties. La première examine quelques approches contemporaines de l'enseignement de l'algèbre et l'importance de l'intégration des problèmes de généralisation et de preuve dans ce domaine. La deuxième partie présente rapidement le contexte de l'enseignement de l'algèbre en Suisse romande. Nous décrivons ensuite la séquence expérimentée et la méthode d'analyse des données recueillies. Enfin, dans la dernière partie, nous proposons une analyse des processus de preuve employés par les élèves.

Quelques éléments sur l'enseignement de l'algèbre

Pour commencer, nous rappelons certains éléments clés de la didactique de l'algèbre, comme la complexité inhérente à l'apprentissage de l'algèbre (et donc à son enseignement), déjà abordés dans notre travail antérieur (Slim & Coppé, 2025). Nous reprenons les conclusions des travaux de Grugeon (1997) sur les compétences clés pour maîtriser l'algèbre élémentaire, organisées en deux dimensions non indépendantes et non hiérarchisées, la dimension outil pour résoudre des problèmes et la dimension objet d'enseignement (les notions algébriques et leurs propriétés, les techniques de calcul) au sens de Douady (1986), soulignant ainsi la nécessité d'un équilibre entre ces deux aspects. Afin de renforcer l'attention portée à la dimension outil pour résoudre des problèmes, et d'approfondir la compréhension des nouveaux concepts mathématiques, Bednarz et al. (1996) ont suggéré quatre approches didactiques pour introduire l'algèbre, dont celle par la généralisation de modèles numériques et géométriques et la production de formules. Ces auteurs précisent que cette approche offre également la possibilité d'explorer le processus de validation de la généralisation produite. Les travaux de recherche sur l'importance de la preuve (Balacheff, 1987, 2019) mettent en lumière son rôle crucial dans le développement de compétences mathématiques et de la pensée critique chez les élèves, en soulignant également les défis et les approches nécessaires pour intégrer efficacement la preuve dans l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. Larguier (2015) ainsi que Bombrun-Nigon et Coppé (2014) s'appuient sur les travaux de Barallobres (2004) pour montrer que la démarche de preuve, dans le cadre d'un enseignement introductif de l'algèbre, est un outil permettant la validation des propositions mathématiques, renforçant ainsi la dimension « outil » de l'algèbre. En effet, l'apprentissage et la pratique de la preuve en mathématiques impliquent une variété de processus allant de la formulation de conjectures, la réfutation par la recherche de contre-exemples, l'exploration du domaine de validité d'une conjecture, l'identification de « patterns », à l'utilisation de diverses représentations, cadres, registres... (Ouvrier-Buffet, 2018). Cette diversité enrichit l'expérience mathématique des élèves et favorise le développement de compétences mathématiques. En engageant les élèves dans un processus de preuve, on les encourage notamment à être rigoureux et précis dans leur raisonnement, ce qui est crucial pour le succès dans les disciplines scientifiques et techniques.

Les programmes de calculs

La notion de programme de calculs (PC) revêt une grande importance dans les travaux en didactique de l'algèbre (Drouhard, 1992, 1995 ; Chevallard & Bosch, 2012 ; Assude et al., 2012).

> La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de « faire un calcul », c'est-à-dire le fait d'opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme. (Drouhard, 1995, p. 167)

Les PC offrent un moyen efficace d'introduire progressivement la notion d'expression littérale. Ils servent également de lien entre l'approche procédurale du calcul littéral, qui se concentre sur les étapes à suivre pour effectuer des calculs, et l'approche structurelle, qui met l'accent sur la compréhension des relations et des structures sous-jacentes dans les expressions mathématiques. Enfin, les problèmes intégrant des programmes de calcul offrent un espace d'exploration riche, favorisant l'engagement dans une démarche de recherche fondée sur les essais, les conjectures et la formulation de preuves ou l'utilisation de contre-exemple.

Quelques éléments sur le contexte de la Suisse romande

Nous allons maintenant donner quelques précisions sur l'organisation de l'enseignement de l'algèbre en Suisse romande (et notamment dans le canton de Vaud) en examinant la place donnée aux activités de preuve et aux programmes de calculs.

Les objectifs d'apprentissage de l'algèbre au secondaire 1, tels que définis par le Plan d'Études Romand, sont majoritairement abordés dans la partie MSN 33 "Fonction et Algèbre", spécifiquement dans la composante 5, qui vise à "Résoudre des problèmes numériques et algébriques en mobilisant l'algèbre comme outil de calcul (équations), de preuve ou de généralisation", incluant « l'utilisation du calcul littéral comme outil de preuve dans des situations simples », ce qui montre que le plan d'études ne néglige pas les preuves en algèbre.

Dans le canton de Vaud, on note une concentration significative de l'enseignement de l'algèbre durant les années de 10H et 11H alors qu'une introduction succincte à l'algèbre est effectuée en 9H avec seulement 10 périodes dédiées sur un total de 160, ce qui représente 6,25 % du volume horaire annuel. En revanche, en 10H, l'algèbre représente 25 % des périodes annuelles, tandis qu'en 11H, cette proportion atteint 31,25 % des 160 périodes prévues.

L'analyse des Moyens d'Enseignement Romands (MER) permet de mettre en évidence que les problèmes utilisant le calcul littéral sont particulièrement proposés en 11H et qu'il ne figure aucun problème de preuve en 9H dans la partie calcul littéral du thème Fonctions et algèbre. Notons que le chapitre « Nombres naturels et décimaux » propose un seul problème basé sur la notion de contre-exemple (NO51, p. 21). Il existe seulement un exercice en 10H, dans le chapitre « calcul littéral » en guise d'introduction pour prouver la validité de conjectures dans le domaine numérique (FA150, Livre p. 107).[1] et à peine moins de 10 exercices en 11H.

En conclusion et à la suite de nos observations précédentes (Slim & Coppé, 2025), nous mettons en évidence une prédominance de la résolution d'équations et de la notion de fonction tout au long du cycle, reléguant les problèmes de généralisation et de preuves à un rôle secondaire, notamment en début de cycle. De plus, l'algèbre est principalement abordée sous son aspect "objet", en particulier en 9H, avec une focalisation sur les techniques de calcul et une intégration limitée de la résolution de problèmes, témoignant d'une approche formelle de l'algèbre. Compte tenu de ces constats, nous avons élaboré et expérimenté une séquence d'introduction à l'algèbre intégrant des problèmes de généralisation et de preuves. C'est ce que nous allons présenter à présent.

La séquence d'enseignement

Cette séquence, proposée en 9H, s'appuie sur un ensemble de sept séances interconnectées (voir annexe 1) et est structurée en quatre phases distinctes. La première phase (deux séances), est consacrée au calcul réfléchi. Nous avons proposé cette phase pour nous assurer que les élèves maîtrisaient suffisamment la distributivité de la multiplication sur l'addition dans un contexte numérique, afin de présenter la distributivité comme une propriété justifiant la transformation des expressions littérales (Assude et al., 2012).

La seconde phase, correspondant aux séances 3 et 4.[2], se concentre sur les problèmes de généralisation. L'objectif était d'introduire la notion de formule et d'expressions littérales qui pouvaient être transformées grâce aux propriétés des opérations et notamment de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

La troisième phase, qui comprend les séances 5 et 6, est axée sur la preuve en algèbre à travers l'étude de l'équivalence de programmes de calcul (voir annexe 2). L'objectif est d'amener les élèves à formuler et à démontrer des conjectures en utilisant le calcul littéral comme outil de preuve. Inspirés des travaux de Bombrun-Nigon et Coppé (2014), nous avons conçu des problèmes basés sur des programmes de calcul

[1] Nous excluons le FA177 que nous considérons comme un exercice de généralisation et non de preuve contrairement aux auteurs des MER.

[2] C'est cette phase qui est l'objet du premier article (Slim & Coppé, 2025)

pour favoriser la généralisation et la validation des conjectures. Cette approche progressive guide les élèves vers la formulation puis la démonstration de ces conjectures.

La quatrième et dernière phase, réalisée deux semaines après la dernière séance, est une évaluation, composée d'exercices et de problèmes qui rappellent ceux abordés lors de la séquence d'enseignement.

Nous allons maintenant analyser en détail les programmes de calcul proposés dans cette séquence. Cette analyse portera sur les similitudes et les différences entre les programmes, ainsi que sur leur progression en termes de complexité et d'autonomie laissée aux élèves, tout en soulignant les implications didactiques de ces choix.

Analyse des problèmes proposés

Les problèmes de preuves à partir de PC (voir en annexe 2) utilisés dans cette expérimentation visent à faire évoluer les élèves de la généralisation à partir de quelques tests numériques à l'élaboration d'une preuve utilisant éventuellement le calcul littéral. Tous les problèmes, y compris ceux des évaluations, construits sur le même modèle sauf Eval.PC2, partagent un même objectif : amener les élèves à identifier des régularités dans des suites d'opérations, formuler des conjectures et prouver ces conjectures. Le raisonnement inductif, présent dans chaque énoncé, permet aux élèves de passer de la manipulation concrète des nombres à la formalisation abstraite. Enfin, pour entrer dans un processus de preuve, il est nécessaire que les élèves fassent des transformations des expressions littérales et maitrisent, par exemple, la distributivité de la multiplication sur l'addition. Les PC sont conçus avec une complexité croissante, tant au niveau des opérations requises que des concepts algébriques impliqués.

Dans PC1 les opérations sont simples et s'enchainent sans utiliser les règles de priorité des opérations. Ce programme initialise le processus de réflexion mathématique en introduisant une régularité facilement observable facilitant la conjecture (le PC donne toujours 8, quel que soit le nombre choisi).

Dans PC2, le programme de calcul donne toujours deux fois le nombre choisi au départ, ce qui peut engendrer des difficultés dans la reconnaissance et l'expression de la conjecture. De plus, les calculs ne sont plus aussi simples et si les élèves mobilisent des écritures littérales, ils devront utiliser des propriétés, dont la distributivité de la multiplication sur l'addition, pour les transformer.

Pour PC3, plusieurs formulations peuvent être utilisées pour les conjectures, certaines portant sur le caractère procédural (par exemple, on multiplie le nombre par 2 et on ajoute 1), d'autres sur le caractère structural (par exemple, c'est un nombre impair ou c'est 1 de plus que le double). Dans ce dernier cas, la reconnaissance de la forme $2n+1$, caractéristique d'un nombre impair peut être une connaissance non disponible chez des élèves de 9H.

Dans PC4, il y a 3 programmes à comparer. Les deux nombres à tester amènent au même résultat 0 sans que les 3 programmes soient pour autant tous équivalents (seuls les deux premiers le sont). Par ces choix de variables, nous souhaitions introduire la notion de contre-exemple qui est cruciale pour faire évoluer le raisonnement des élèves vers une pensée mathématique rigoureuse et déductive.

EvalPC.1 propose une série d'opérations algébriques complexes conçues pour ramener systématiquement au nombre initial choisi par l'élève. En cela, nous nous assurons que les élèves maîtrisent les propriétés des opérations et les manipulations de base des expressions algébriques. L'étape où l'on double $2n+5$ pour obtenir $4n+10$ nécessite l'application correcte de la propriété distributive de la multiplication sur l'addition. Enfin, la réorganisation des termes lors de la simplification nécessite l'utilisation des propriétés d'associativité et de commutativité, essentielles en algèbre.

EvalPC.2 est un problème qui se distingue un peu des autres puisqu'il est formulé de manière un peu différente et qu'il comporte une difficulté importante, à savoir exprimer trois nombres consécutifs. Même si on peut penser que ce problème est un peu trop difficile pour une évaluation, nous souhaitions tester si les élèves pouvaient transférer le travail fait lors de PC3.

ANALYSE DES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

Nous allons maintenant analyser les productions des élèves en distinguant les essais, les conjectures produites et les preuves. Pour ces dernières, nous utilisons la typologie proposée par Balacheff (1987) qui distingue deux grandes catégories de preuves : les preuves pragmatiques ancrées dans l'action, l'observation et l'expérimentation, et les preuves intellectuelles caractérisées par un raisonnement abstrait et éventuellement formel.

Dans les preuves pragmatiques, il distingue :

- L'empirisme naïf qui consiste ici à effectuer des tests sur quelques nombres pour trouver une conjecture puis de se servir de ces exemples pour généraliser en indiquant que si cela fonctionne pour ces nombres, cela fonctionnera pour tous les nombres.
- L'expérience cruciale permet, une fois la conjecture établie à partir de quelques nombres, de la généraliser en choisissant un ou des nombre(s) "compliqué(s)" (comme un nombre très grand ou un nombre négatif) en pensant que si la règle fonctionne pour ce nombre, elle fonctionnera pour tous les nombres.
- L'exemple générique permet d'utiliser un exemple spécifique pour mettre en œuvre un raisonnement général. Ainsi les exemples choisis ne sont pas particulièrement importants en eux-mêmes, mais servent à appuyer le raisonnement général. Par exemple pour PC3, question c : si je prends un nombre quelconque comme 7, et que j'ajoute le nombre suivant, qui est 8, alors j'additionne en fait 7 + 7 + 1. 7 + 7 est 14 qui est un nombre pair et si j'ajoute 1, on obtient un nombre impair.

Balacheff (1987) définit ensuite les preuves intellectuelles :

- L'expérience mentale : les élèves essaient de raisonner mentalement en invoquant l'action, par exemple en traduisant les opérations en phrases telles que : pour n'importe quel nombre si j'ajoute son suivant, je sais que l'un est pair et l'autre impair, donc si j'ajoute un pair et un impair, le résultat sera toujours impair.
- La démonstration : pour le thème mathématique étudié, les élèves utilisent le calcul littéral pour prouver.

Enfin Balacheff (1987) ajoute qu'un pont peut être envisagé entre les preuves pragmatiques et les preuves intellectuelles :

> C'est là, quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Une marque de ce passage est une évolution des moyens langagiers mis en oeuvre. (Balacheff, 1987, p. 165)

Dans le cadre de l'introduction à l'algèbre, cette distinction est cruciale pour comprendre comment les élèves passent de procédures basées sur des exemples à une approche plus globale et formalisée, reflétant ainsi leur progression vers une généralisation algébrique. Nous considérons que la mobilisation des types de preuves par les élèves et l'évolution de leurs usages seront des marqueurs importants du développement de compétences algébriques des élèves, mais c'est également un levier pour leur montrer l'utilité de l'algèbre.

LES RÉSULTATS

Le nombre d'élèves présents durant la séquence a varié entre 22 et 24. Les élèves ont principalement travaillé de manière individuelle sur les problèmes proposés, nous avons recueilli toutes les productions écrites. En raison de contraintes temporelles, la sixième séance prévue n'a pu être réalisée. La cinquième séance, quant à elle, s'est déroulée dans un contexte de remplacement, avec des conditions d'expérimentation moins favorables et en l'absence de l'enseignante. Finalement seuls les deux premiers programmes de calcul ont pu être abordés en classe et sont analysés ici. Pour chaque programme, nous analysons successivement les essais, les conjectures et les preuves. Ces dernières sont classées selon la typologie de Balacheff. Dans la colonne « démonstration ou tentative de démonstration », nous avons choisi de comptabiliser à la fois les démonstrations correctes (même si les critères formels ne sont pas toujours respectés), incorrectes et les tentatives non abouties à partir du moment où les élèves ont utilisé des expressions littérales pour exprimer le PC.

Analyse des productions des élèves sur PC1 et PC2.

La séance, avec 23 élèves, a débuté par une régulation pour PC1, car rapidement, nous avons observé une mauvaise interprétation de l'instruction « ajouter 8 » puisque certains élèves ont pensé qu'ils devaient concaténer 8 avec le nombre précédent (double du nombre de départ). Passée cette erreur initiale classique (Booth, 1985), les élèves se sont investis dans la tâche et ont rapidement saisi les consignes des questions a et b (commune aux 2 PC), parvenant à effectuer des tests avec plus de deux nombres et à formuler des conjectures.

Ils ont pu alors tester plusieurs nombres et formuler leurs premières conjectures. Sur PC1, les 23 élèves ont effectué au total 59 essais. Parmi eux, deux comportaient une erreur de calcul. 18 élèves ont émis une conjecture, dont 16 correctes. Pour PC2, on recense 56 essais au total et seulement 2 erreurs. Là encore, 18 élèves ont formulé une conjecture et cette fois toutes se sont avérées justes.

Dans les conjectures, le mot « toujours » revient régulièrement (comme dans l'exemple à gauche ci-dessous), ce qui semble montrer qu'il y a un premier passage à la généralisation. Certains élèves (comme sur l'exemple ci-dessous à droite) ont même constaté que PC2 ne se comportait pas comme PC1 (le nombre est une constante ou bien fonction du nombre de départ).

Exemple de conjecture PC1	**Exemple de conjecture PC2**
b. Que remarques tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ? On revient à 8 Le résultat est tjr 8	b. Quelle conjecture peut-on formuler ? Ce n'est pas le même resultat mais c'est le double du nombre de départ

Tableau 1 – Exemples de conjectures pour PC1 et PC2 par deux élèves différents

En ce qui concerne les preuves, un nombre important d'élèves, 7 pour PC1 et 5 pour PC2, n'ont rien produit. Pour PC1, les 10 démonstrations sont justes. Pour PC2 il y en a seulement 10 qui sont justes, 5 sont fausses (les élèves n'ont pas traduit le PC correctement ou ils ont utilisé des règles de calcul incorrectes) et 2 élèves affirment seulement l'égalité de l'expression traduisant le PC et de leur conjecture (voir les exemples ci-dessous). Ces résultats peuvent témoigner d'une appropriation des notions introduites lors des séances précédentes sur la généralisation par une partie des élèves.

PC	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle	
	Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Démonstration ou tentative de démonstration
PC1	1	/	/	5	10
PC2	1	/	/	0	17

Tableau 2 – Répartition des preuves utilisées par les élèves pour PC1 et PC2

L'analyse révèle également un recours plus marqué aux expressions littérales pour PC2 (17 occurrences contre 10 pour PC1). Cela peut refléter soit une plus grande aisance acquise après PC1, soit le fait que la complexité de PC2 incite davantage d'élèves à formuler un raisonnement littéral ou déductif pour justifier leur résultat. En effet, dans PC1, la régularité du résultat (toujours 8) repose sur des relations simples, et favorise l'élaboration de preuves autant pragmatiques qu'intellectuelles. En revanche, dans PC2, le raisonnement est plus complexe puisqu'il est difficile pour les élèves d'expliquer pourquoi cette règle est toujours vraie sans une bonne maîtrise des concepts algébriques sous-jacents.

Pour illustrer les différents types de preuves, voici quelques exemples tirés des productions des élèves pour PC1. E1 (empirisme naïf) ajoute un calcul à ses quatre précédents pour convaincre de la véracité de sa conjecture. Il teste différents nombres de départ (3, 15, 20, 13...) et constate trois résultats égaux à 8, un erroné à -2, sans forcément le questionner ou le prendre en compte pour sa conjecture. E22 (expérience mentale) essaie d'expliquer le mécanisme de calcul sous-jacent car il a remarqué qu'une fois les calculs faits 2x est annulé par la soustraction du double du nombre de départ. E3 et E4 ont effectué une démonstration (même si la forme n'est pas encore experte) en traduisant le PC en une expression littérale qu'ils transforment et ils obtiennent 8 (à noter que E4 a choisi le double du nombre de départ comme variable).

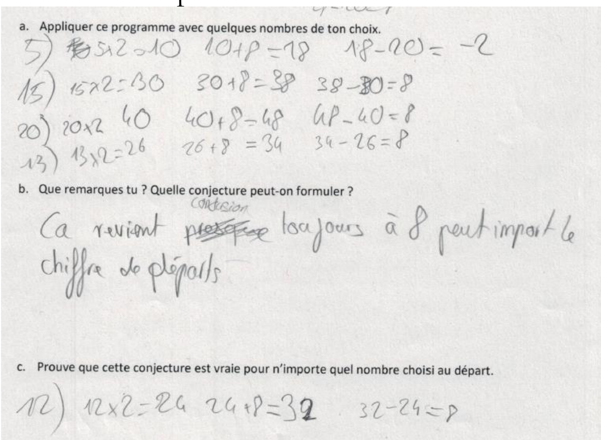
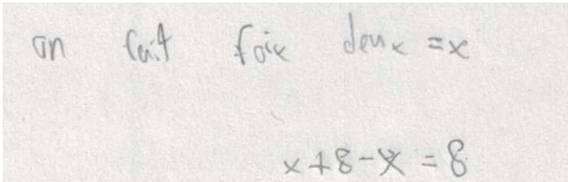
<table>
<tr>
<td>Élève E1 : empirisme naïf

</td>
<td>Élève E22 : expérience mentale
On obtient toujours 8.
Quelque chose fait en sorte que dans le calcul on +8.
mais que le reste du calcul donne 0.</td>
</tr>
<tr>
<td>Élève E3 : démonstration
$X \cdot 2 + 8 - X \cdot 2 = X \cdot 2 - X \cdot 2 + 8 = 0 + 8 = 8$
X = nombre choisi au départ</td>
<td>Élève E4 : démonstration

</td>
</tr>
</table>

Tableau 3 – Des exemples de preuves selon la typologie de Balacheff pour PC1

L'analyse de ces productions a également porté sur l'utilisation de la distributivité pour transformer les expressions littérales dans le problème PC2. Comme indiqué plus haut, 10 élèves montrent une application correcte de la distributivité pour simplifier l'expression du programme de calcul et ainsi démontrer la conjecture, avec toutefois des écritures qui ne sont pas encore complètement formalisées comme dans l'exemple suivant où E12 développe (n+4)·2, par « morceaux » puis simplifie l'expression en identifiant des termes qui s'annulent et en constatant qu'il ne reste que 2n. À noter que cet élève n'utilise pas le signe =.

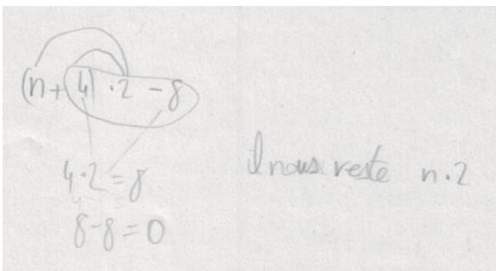


Fig. 1 : Production Élève E12

5 élèves n'ont pas réussi à démontrer comme E5 qui a traduit les calculs par étapes et a utilisé plusieurs variables, dont certaines pour désigner un résultat intermédiaire (nous avions déjà constaté cela pour les

formules de généralisation). Bien que cette approche montre une tentative de formalisation, elle ne lui permet pas de démontrer la conjecture.

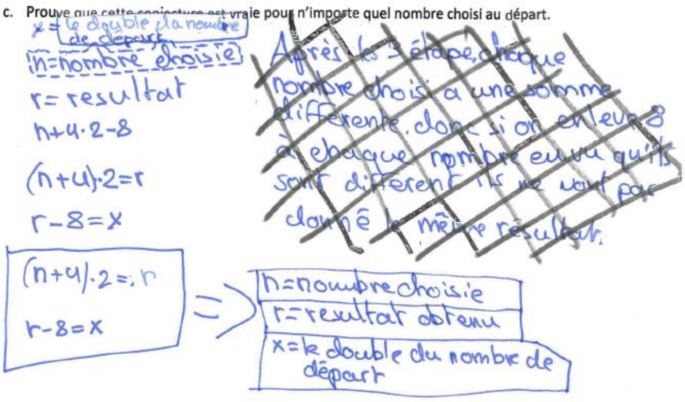


Fig. 2 : Production Élève E5

Enfin 2 sont restés bloqués sur leur première expression littérale sans tenter de la transformer, comme dans l'exemple ci-dessous où l'élève a en plus introduit deux variables. On peut faire plusieurs hypothèses pour l'expliquer : ils ont pensé qu'écrire l'égalité suffisait pour la prouver ou bien ils ne savaient pas transformer leur expression littérale et se sont arrêtés.

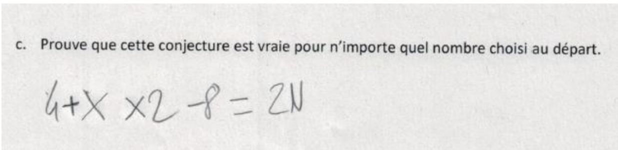


Fig. 3 : Production Élève E14

<u>Analyse de EvalPC.1</u>

Sur 23 élèves, seulement 20 ont émis une conjecture. Parmi elles, 17 sont correctes et 3 sont erronées en raison soit d'erreurs de calcul ayant amené à une conjecture différente (par exemple, « toujours le nombre départ quand il est pair »), soit d'un oubli d'une étape du programme.

Voici le tableau récapitulatif des différentes preuves utilisées.

PC	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle	
	Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Démonstration ou tentative de démonstration
Eval PC.1	4	0	0	2	13

Tableau 4 : Les preuves utilisées pour EvalPC.1

Il est à noter que seulement 4 élèves n'ont pas produit de preuve et que 4 autres utilisent encore l'empirisme naïf. Sur les 13 élèves qui ont fait des tentatives de démonstrations, 3 ont produit des démonstrations correctes, en mobilisant la distributivité de manière adéquate alors que 5 l'ont mal utilisée comme dans l'exemple ci-dessous. E2 a tout d'abord une expression littérale incorrecte puisqu'il n'a pas tenu compte de la priorité des calculs, ensuite il regroupe de façon incorrecte certains termes pour les additionner et enfin il fait une erreur de calcul qui lui permet d'arriver au résultat voulu.

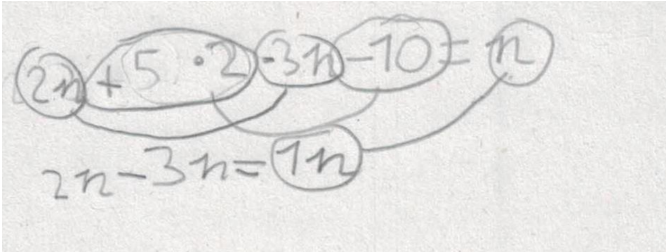


Fig. 4 : Production Élève E2

Nous avons constaté que certains élèves continuaient à faire des calculs en ligne comme E10 ci-dessous qui traduit le PC pas à pas et arrive à conclure.

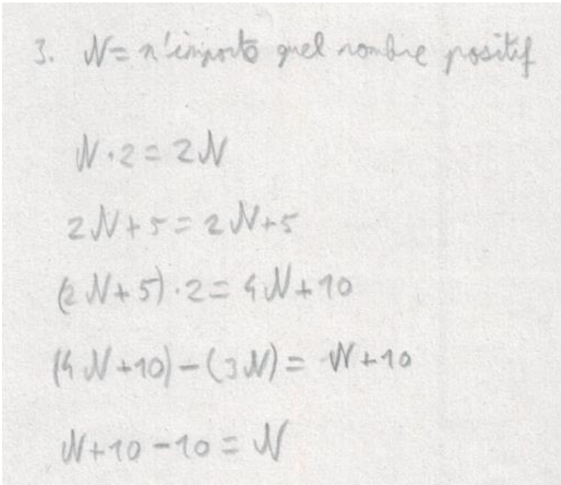


Fig. 5 : Production Élève E10

Enfin 5 élèves ont su passer du programme de calcul à une expression littérale (pas toujours juste) mais ensuite, pour la preuve, comme on l'a vu pour PC2, ils ont seulement affirmé l'égalité de cette expression avec leur conjecture comme on peut le voir dans les productions suivantes dont 2 comportent des erreurs dans l'expression littérale.

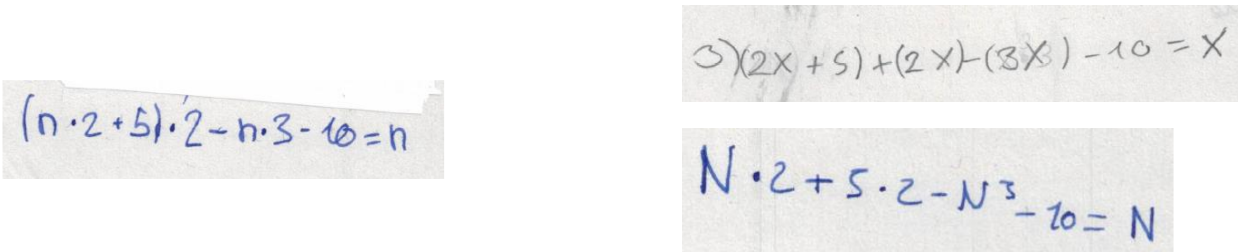


Fig. 6 : Exemples de productions erronées - EvalPC.1

Ces différentes productions sont révélatrices des difficultés propres à l'entrée dans l'apprentissage de l'algèbre. Si ces élèves ont fait un pas vers la généralisation, ils semblent encore percevoir les expressions littérales comme des entités statiques, dépourvues de leur caractère manipulable et susceptibles d'être soumises à des opérations algébriques. De plus ils sont encore dans l'interprétation du signe "=" comme un opérateur de résultat, plutôt que comme une relation d'équivalence entre deux expressions. Ces conceptions limitent leur capacité à transformer et à démontrer une égalité. Cette observation est cohérente avec les travaux de Kieran (1981), qui soulignent ces obstacles conceptuels fréquents lors de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. Par ailleurs, l'énoncé demandant de « prouver » une conjecture, sans préciser les modalités de la démonstration attendue, peut avoir conduit certains élèves à supposer que la simple écriture de l'expression littérale suffisait pour valider leur raisonnement.

Analyse de EvalPC.2

L'analyse de EvalPC.2 met en évidence une difficulté plus grande de cet exercice, ce qui est conforme à notre analyse *a priori*. Les tests numériques ont été effectués correctement par tous. Cependant, la recherche de la conjecture a nécessité davantage de tests que pour le programme précédent et a semblé plus difficile à identifier.

2 élèves n'ont pas produit de conjecture, tandis que les 21 autres se répartissent selon les catégories suivantes :

Conjecture erronée (par ex. « multiple de 6 »)	« Il n'existe pas de conjecture »	Multiple de 3	Le triple du nombre du milieu
4	1	6	10

Tableau 5 : Les différentes conjectures EvalPC.2

Seulement 16 élèves ont tenté d'établir une démonstration (y compris un élève qui n'avait pas fait de conjecture), avec seulement 4 justes, 4 fausses et 8 ne comportant qu'une égalité comme déjà vu sur les autres PC (par exemple, 4 élèves ont écrit une égalité du type m+n+o = 3n sans aucune justification).

PC	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle	
	Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Démonstration ou tentative de démonstration
Eval PC.2	4	0	0	0	16

Tableau 6 : Les preuves utilisées dans EvalPC.2

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, nous avons constaté la difficulté (structurale) des élèves pour désigner trois nombres entiers consécutifs. Voici les différentes écritures produites.

n, n+1 et n+2	n-1, n et n+1	3 lettres qui se suivent : par exemple m, n et o ou A, B et C	n, n et n	n, m et n
1	3	10	1	1

Tableau 7 : Les différentes écritures de 3 entiers consécutifs

On trouve de façon importante et classique l'utilisation soit de la lettre n qui représente toutes les variables, soit de trois lettres qui se suivent dans l'ordre alphabétique comme sur les deux exemples qui suivent. E9 considère les nombres m, n et o en indiquant que ces nombres se suivent, puis il écrit que la somme est 3 fois le 2e nombre, ce qui correspond à sa conjecture. Bien sûr cet élève ne peut pas aller plus loin puisqu'aucun travail mathématique ne peut être fait sur la somme même si l'élève qualifie bien les trois nombres.

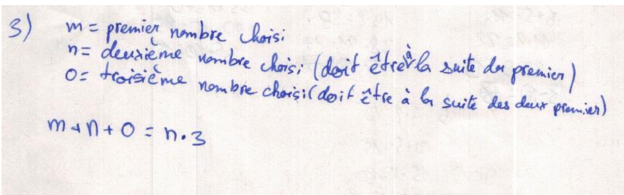


Fig. 7 - Production Élève E9

E8, choisit également A, B et C pour désigner les 3 entiers consécutifs, mais ensuite il met en place un raisonnement différent de E9, car il prend en compte que la somme des deux nombres extrêmes (A et C) est égale à deux fois le nombre du milieu (B), ce qui lui permet de conclure que la somme totale est 3B. Bien que les lettres utilisées ne permettent pas d'effectuer des calculs pertinents, le raisonnement sous-jacent est correct, montrant une utilisation intuitive des relations entre les nombres (on est ici dans le cas d'une expérience mentale combinée avec une utilisation de symboles algébriques qui ne peuvent pas se suffire à eux-mêmes pour avoir une signification algébrique).

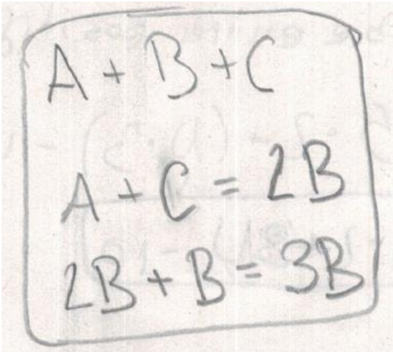


Fig. 8 : Production Élève E8

Pour terminer, voici une production particulière dans laquelle on constate que E18 utilise des abréviations pour désigner les nombres et alterne le signe + et le ;. De plus, il remarque que lorsqu'on a trois entiers consécutifs l'un est multiple de 3. Cet élève tente également de combiner des écritures littérales et une expérience mentale.

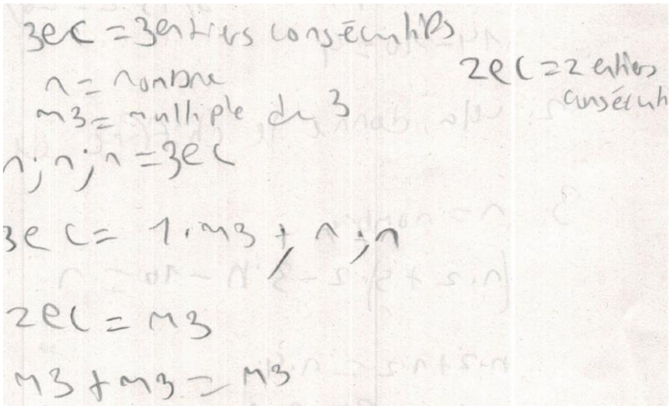


Fig. 9 : Production Élève E18

Bien sûr, la désignation des trois nombres consécutifs a significativement influencé la capacité des élèves à formuler et à prouver la conjecture de manière rigoureuse. Comme anticipé, EvalPC.2 s'est révélé plus difficile que EvalPC.1, avec une augmentation notable des absences de preuve et une utilisation des preuves pragmatiques comme indiqué dans le tableau 6.

En l'état, cet exercice peut être trop complexe pour certains élèves si les apprentissages en jeu (sur la mobilisation d'expressions littérales ou sur la démonstration en algèbre) n'ont pas été suffisamment consolidés. Il pourrait trouver sa place dans une évaluation si des activités préparatoires et un soutien plus guidé étaient proposés pour accompagner les élèves dans leur transition vers des preuves plus formelles et abstraites, ce que nous n'avons pas pu réaliser faute de temps.

CONCLUSION ET DISCUSSION

Cette séquence, axée sur l'introduction de problèmes de généralisation et de preuve en 9H, a mis en lumière des résultats prometteurs pour amener les élèves à formuler des conjectures et à s'engager dans des processus de preuve. Les productions des élèves, dans leur diversité, montrent qu'ils s'approprient progressivement les outils algébriques et développent leur raisonnement mathématique.

Les élèves ont démontré une aptitude à résoudre des problèmes de preuve et ont progressé dans leurs raisonnements mathématiques, évoluant vers une approche plus formelle déjà initiée par les séances sur les problèmes de généralisation. Cette évolution positive souligne le potentiel de l'introduction de ces problèmes au début de l'apprentissage de l'algèbre. Toutefois, des difficultés subsistent notamment sur la manipulation des expressions algébriques, notamment dans l'utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Comme nous l'avons souligné dans le premier article (Slim & Coppé, 2025), le travail fait en amont sur la distributivité n'est pas suffisant. Nous pensons donc qu'il est important d'intégrer et d'articuler le travail sur le sens et sur les aspects techniques dans les débuts de l'enseignement de l'algèbre et sur un temps long.

De la même façon, nous redisons que notre expérimentation s'est faite dans des contraintes temporelles fortes qui n'ont pas permis de travailler suffisamment en profondeur les différents types de problèmes et de réinvestir ce qui a été appris. C'est encore plus marqué pour ces deux séances puisque nous avons dû supprimer deux problèmes sur quatre. Ainsi, il nous semble qu'il y avait trop de différences de complexité entre les deux problèmes travaillés et ceux donnés en évaluation, ce qui rend les résultats de notre évaluation fragiles. Mais tout de même, les élèves ont mobilisé le calcul littéral et ont produit des preuves, pas toujours correctes, mais qui témoignent de connaissances en construction. Un des objectifs de cet article est de donner des informations aux enseignants et enseignantes qui voudraient utiliser cette séquence sur ce qu'ils peuvent attendre des élèves, sur les erreurs prévisibles et sur les points d'attention à développer.

De façon plus générale, il nous semble que pour améliorer l'enseignement de l'algèbre, il est essentiel d'adopter une approche équilibrée entre les dimensions « objet » et « outil » de l'algèbre. Notre expérimentation montre qu'il est possible de combiner des exercices formels avec des activités pratiques de généralisation et de preuve. L'utilisation des programmes de calcul s'est révélée particulièrement féconde pour engager les élèves dans une démarche de recherche, les amenant à formuler des conjectures, à les tester et à élaborer des preuves, même partielles. Cette approche a permis aux élèves de développer une compréhension plus profonde des concepts algébriques et de renforcer leurs compétences en raisonnement mathématique, tout en se confrontant aux exigences de la validation en algèbre.

Bibliographie

Assude, T., Coppé, S., & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : Atomisation et réduction. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives (*pp. 41-62). La pensée sauvage.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.

Balacheff, N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *XXVIe Colloque CORFEM*. https://hal.science/hal-02981131

Barallobres, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2-3), 285-328.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Dans N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 3-12). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_1

Bombrun-Nigon, C., & Coppé, S. (2014). La" preuve pour comprendre", un levier pour la construction du sens de la lettre en classe de Cinquième. *Repères IREM*, *94*, 9-30.

Booth, L. (1985). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, *5*, 5-17.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives (*pp. 13-33). La pensée sauvage.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot-Paris VII.

Drouhard, J.-P. (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. *Actes de la 8e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, 325-344.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*(2), 167-210.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

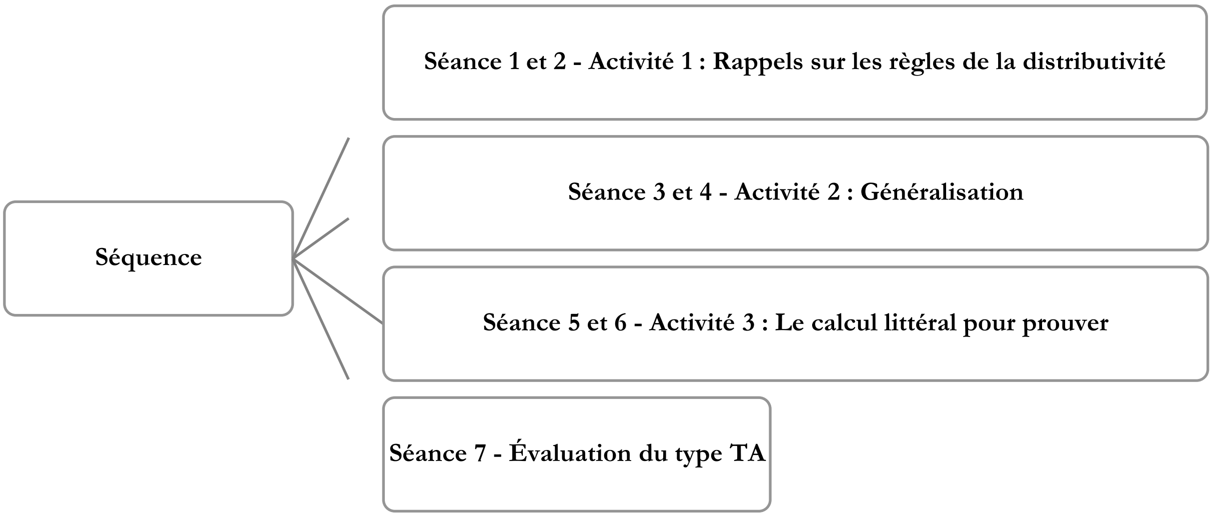
Larguier, M. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. In L. Theis (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage–Actes du colloque EMF2015* (pp. 313-333).

Ouvrier-Buffet, C. (2018). Quels outils pour analyser l'activité de preuve en mathématiques à l'école primaire ? Propositions à partir d'une situation de recherche en CM1/CM2. Dans J. Pilet & C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018*. https://hal.science/hal-03452844

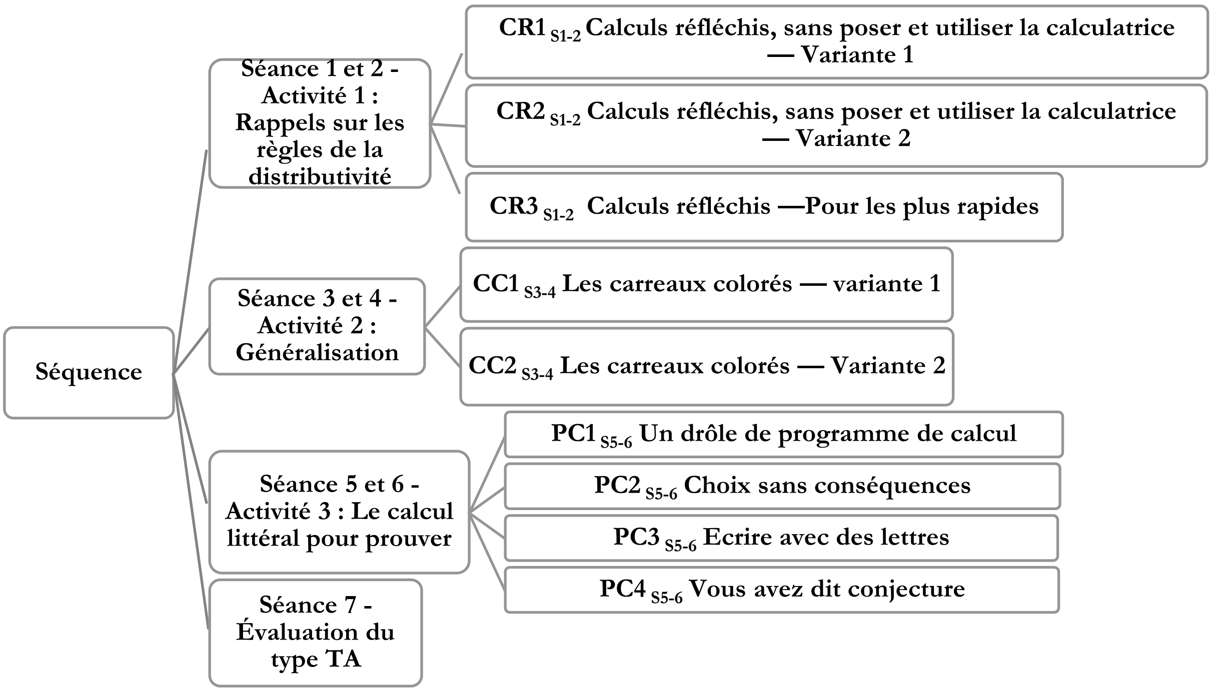
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Slim, A. & Coppé, S. (2025). Introduction de l'algèbre en 9H avec des problèmes de généralisation. *Revue de Mathématiques pour l'école, 242*, 3-18.

ANNEXE 1
Description Détaillée de la Séquence d'Enseignement



Les séances



ANNEXE 2

Voici les 4 PC qui ont été utilisés :

<table>
<tr>
<td>PC1. Un drôle de programme de calcul
• Choisir un nombre.
• Multiplier ce nombre par 2.
• Ajouter 8 au résultat.
• Soustraire (retrancher) le double du nombre de départ.
a. Applique ce programme avec quelques nombres de ton choix.
b. Que remarques-tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ?
c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.</td>
<td>PC 2. Choix sans conséquences
• Choisir un nombre.
• Ajouter 4.
• Multiplier par 2.
• Soustraire (retrancher) 8.
a. Applique ce programme avec quelques nombres de ton choix.
b. Quelle conjecture peut-on formuler ?
c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.</td>
</tr>
<tr>
<td>PC3. Écrire avec des lettres.
Choisir un nombre.
• Ajouter 4.
• Multiplier par 2.
• Soustraire (retrancher) 7
a. Quelle conjecture peut-on formuler ?
b. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.
c. Prouver que la somme de deux entiers consécutifs est TOUJOURS impaire.</td>
<td>PC4. Vous avez dit « conjecture »
Voici 3 programmes de calculs :
<table>
<tr><th>Programme 1</th><th>Programme 2</th><th>Programme 3</th></tr>
<tr><td>Choisir un nombre
Ajouter 4
Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ
Soustraire 5</td><td>Choisir un nombre
Ajouter 2
Prendre le carré du résultat précédent
Soustraire 9</td><td>Choisir un nombre
Écrire son double puis ajouter 8
Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ
Soustraire 10</td></tr>
</table>
a. Calcule les résultats des trois programmes pour la valeur 1 et -5 ?
Qu'observe-t-on ?
b. Quelle conjecture peut-on formuler ?
c. Choisis un nombre au hasard et calcule les résultats des trois programmes pour cette valeur. Qu'observe-t-on ?</td>
</tr>
</table>

Tableau 1 – Récapitulatif des PC des séances 5 et 6

L'évaluation contient les deux problèmes suivants :

<table>
<tr>
<td>EvalPC.1. Vous avez dit « conjecture »
Choisir un nombre entier positif
• le Doubler
• Ajouter 5
• Doubler ce résultat
• Retirer le triple du nombre de départ
• Retirer 10
• Écrire le résultat
a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix
b. Quelle conjecture peut-on formuler ?
c. Prouver que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.</td>
<td>EvalPC.2. Vous avez dit « conjecture »
• Choisir 3 entiers consécutifs (qui se suivent en ordre croissant)
• Calculer leur somme
a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix
b. Quelle conjecture peut-on formuler ?
c. Prouver que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.</td>
</tr>
</table>

Instaurer un debat mathematique en classe de primaire : recit d'une experimentation autour des transformations geometriques

Christine Scalisi Neyroud ; Jimmy Serment ; Valérie Batteau ; Sarah Epp ; Jana Trgalová ; Liliane Vialle

UER MS, HEP Vaud, Lausanne

Résumé

Cet article relate une expérimentation menée sous la forme de lesson study (LS) visant à mettre en œuvre un débat mathématique autour des transformations géométriques en classe de 7-8P. L'équipe a préparé une leçon en commençant par la planification des éléments essentiels à afficher au tableau. Cette expérimentation nous a permis d'identifier des éléments qui favorisent et rendent possible l'émergence de débats en classe de mathématiques.

Mots clés : débat mathématique, transformations géométriques, tableau, lesson study

Introduction

Notre équipe, composée d'enseignants et de formateurs en didactique des mathématiques, a travaillé en *lesson study* (LS, Clivaz, 2015) dans le cadre de la préparation des formations continues aux nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques (ESPER) dans le Canton de Vaud. Notre travail en LS a porté sur le débat mathématique et sur les transformations géométriques, en particulier l'anticipation de l'image d'une figure après deux isométries, en classe de 7-8P (élèves de 10/11 et 11/12 ans). Nous avons choisi une tâche, issue des nouveaux moyens de 7P *Après deux retournements* (voir Annexe 1). La tâche a été modifiée lors de la préparation de la leçon puis a été mise en œuvre dans une classe de 8P de la région lausannoise.

La première partie de l'article présente quelques éléments sur le débat mathématique et scientifique. La deuxième partie expose les choix collectifs de conception et d'analyse *a priori* de la tâche, afin de mettre en œuvre le débat en classe. La troisième partie relate des éléments de la leçon mise en œuvre en classe. Nous concluons sur l'intérêt du débat en classe de mathématiques ainsi que sur les éléments qui le favorisent et le rendent possible.

Le débat mathématique et scientifique

Legrand (1993) décrit le débat scientifique comme un moyen d'acquisition des connaissances. Il fait l'hypothèse que pour comprendre une proposition scientifique, il faut être capable de douter de sa véracité, de trouver des contre-arguments ou des éléments de validation. Pour ce faire, rien de mieux que de travailler sur les propositions des pairs qui sont, *a priori*, de nature incertaine. Pour y arriver, il y a trois conditions indispensables (Legrand, 1993) :

- Les énoncés travaillés doivent être conjecturaux.
- L'ensemble de la classe doit pouvoir oser émettre des propositions, mêmes fausses, sans se sentir dénigré par le reste de la classe.
- L'enseignant ne doit pas montrer de validation ou de désaccord sur les propositions afin que les élèves puissent réellement douter des propositions des pairs.

L'auteur ne fait guère de distinction entre le débat scientifique et le débat mathématique. Pour lui, le débat mathématique est un débat scientifique qui s'inscrit dans le cadre des mathématiques, en proposant une situation problème qui permet d'ouvrir un débat.

La différence entre ces deux débats se situe notamment dans les définitions d'une hypothèse et d'une conjecture. Une hypothèse n'a pas le même sens en sciences qu'en mathématiques. Selon l'Aide-mémoire 9-10-11 , « en mathématiques, on emploie le terme conjecture, alors qu'en sciences, on utilise le terme hypothèse (faire une hypothèse) » (p. 13). Une conjecture serait une hypothèse mathématique. Continuons notre investigation du côté des textes officiels, le Plan d'Études Romand (2010d). Ce dernier parle du débat scientifique en ces termes :

> Il peut se faire aussi bien en début d'activité de recherche afin d'extraire et de confronter les conceptions de chacun, qu'en fin d'activité où il s'agira cette fois de confronter les résultats obtenus. L'élève qui veut participer au débat scientifique organisé par l'enseignant est invité à prendre la parole en s'adressant directement à ses pairs (lexique du PER, Conférence intercantonale de l'instruction publique, 2010b).

Le PER (2010b) explique de façon nuancée la différence entre hypothèse et conjecture.

HYPOTHÈSE

ce terme a un sens différent en mathématiques et en sciences ; en mathématique, il correspond à ce qui est connu, par exemple pour démontrer un théorème; en sciences, il correspond à une supposition, une tentative d'explication résultant d'une problématique, plausible en l'état des connaissances de la personne qui l'émet qui doit être confrontée à l'épreuve des faits, l'élaboration d'hypothèses est une étape essentielle à toute démarche d'investigation scientifique.

CONJECTURE

Par «pose d'une conjecture puis validation ou réfutation», on entend : émettre des suppositions sur «quelque chose qui semble vrai», puis essayer de le démontrer. «Conjecture» a ainsi une signification proche du terme «hypothèse» employé dans la langue courante. Pour le mathématicien, «hypothèse» prend un sens particulier, c'est un outil de démonstration.

Fig. 1 : Extrait du lexique du PER (2010b)

À noter que certaines conjectures restent encore à prouver, même si elles semblent stables et que l'on se base sur elles telle que la conjecture de Goldbach. Prouver une conjecture est nettement plus compliqué que la réfuter, car pour réfuter, il suffit d'un contre-exemple.

Forts de ces considérations, nous optons pour les termes de débat mathématique et de conjecture émis par les élèves qui sera ensuite à valider ou réfuter.

Le rôle de l'enseignant est triple lors du débat (Legrand, 1993). Il doit veiller en premier lieu aux enjeux épistémologiques, c'est-à-dire qu'il doit toujours veiller à ce que le débat soit un enjeu mathématique. Il doit être capable de ramener sa classe sur les objectifs mathématiques au cas où le débat dévierait de sa trajectoire initiale. Il a un rôle social aussi, il ne doit pas interroger tous les élèves, mais il doit veiller à ce que toutes les idées soient exprimées.

Son dernier rôle est la gestion didactique du débat. L'enseignant doit rythmer le débat pour que tous les élèves puissent comprendre. Pour ce faire, il devra prendre le temps de noter au tableau les arguments, ce qui permet de ralentir les échanges oraux, donc de laisser le temps aux élèves les moins rapides de comprendre les arguments. L'écriture au tableau laisse également une trace, une mémoire de ce qui a été dit. Tout en restant neutre en notant les arguments au tableau, ceux-ci serviront à la fin du débat comme une base potentielle pour une institutionnalisation.

Cette approche, différente de l'enseignement ordinaire, ne va pas forcément de soi. L'enseignant doit intégrer durant la leçon des scénarios imprévus car la gestion du débat n'est pas entièrement prévisible et se conduit en fonction des réponses des élèves. Une nouvelle dynamique se met en place et se construit principalement sur les interactions entre les élèves (Bergé, 2016). Son introduction doit être progressive. Elle fait partie d'un continuum qui se déroule jusqu'à la fin de la scolarité de l'élève, commençant au cycle 2, comme le mentionne le PER dans les éléments pour la résolution de problèmes.

On peut initier le débat mathématique au cycle 2 en montrant par un contre-exemple que la conjecture est fausse. C'est une première sensibilisation à ce type de preuve. A cet effet, l'aide-mémoire du secondaire 1 (2019, p. 190) donne les règles principales du débat mathématique :

- Une affirmation est soit vraie, soit fausse ; il n'y a pas d'exception.
- Des exemples, même nombreux, qui vérifient une affirmation ne suffisent pas à prouver que cette affirmation est vraie.
- Un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.
- Une mesure sur un dessin ou une constatation « à vue d'œil » ne suffisent pas à prouver qu'une affirmation géométrique est vraie ou fausse

Un débat s'effectue nécessairement en collectif et peut représenter un des objectifs d'une mise en commun, mais sans se réduire à une mise en commun. En effet, la posture de l'enseignant dans la mise en commun classique est celle de la personne qui « sait » et qui va amener les élèves, par plus ou moins de guidage, à discuter des différentes procédures et réponses des élèves pour faire émerger les connaissances visées, tout en laissant les élèves s'exprimer et présenter leur démarche. Dans le débat mathématique, la mise en doute d'une affirmation permet aux élèves d'avancer des arguments pour défendre leur affirmation. L'incertitude dans le processus de ce type de débat s'arrête lorsqu'une conjecture a été validée ou réfutée, suivie d'une institutionnalisation pour clore les investigations et faire ainsi émerger les connaissances mathématiques ou paramathématiques visées. À ce moment, l'enseignant reprend son rôle habituel.

La remise en doute des savoirs énoncés, origine des conjectures, place les élèves dans une certaine incertitude à laquelle l'enseignant participe par le fait qu'il ne prend pas position, mais il reste garant du maintien du cadre des interactions sociales et mathématiques. La raison de ce changement d'attitude est très bien décrite par Legrand (1993) :

> L'élève accepte plus facilement l'exigence de produire des contre-exemples précis, de fournir des arguments reconnus de tous, quand cette demande vient de personnes qui réclament des arguments pour être persuadés et comprendre, que lorsqu'elle est faite par l'enseignant. En effet, l'élève « sait que le professeur sait » et a déjà tout compris, il sait donc que son questionnement est un faux questionnement et qu'il cherche principalement à vérifier que lui, a bien compris et arrive à l'exprimer (p. 127).

La partie suivante illustre la démarche collective de conception et d'analyse *a priori* de la tâche choisie.

CONCEPTION ET ANALYSE A PRIORI DE LA TÂCHE[1]

La tâche conçue collectivement par l'équipe de *lesson study* vise les objectifs d'apprentissage suivants :

- anticiper l'image d'une figure après deux symétries successives ; reconnaître, décrire et nommer des isométries (translation, symétrie axiale, rotation) ; résoudre des problèmes géométriques en lien avec les transformations étudiées : poser une conjecture, puis la valider ou réfuter (MSN21, 2010c) ;
- s'engager dans le débat mathématique.

En comparaison avec la tâche initiale[2] *Après deux retournements* (Annexe 1), nous proposons trois situations A, B et C (Fig. 2 et annexes 2-3-4) et deux situations pour la différenciation pour les élèves qui auraient terminé avant les autres (annexes 5 et 6) : sur un carré jaune, des figures sont marquées (rond, petit carré, triangle rectangle isocèle et mot JEU), ainsi que deux droites sécantes, qui sont des axes de symétries. Les

[1] Pour plus de détail sur la tâche et son analyse, voir le site « Les transformations géométriques en 7-8P », https://sites.google.com/view/fcmermath7-8hepvaudtransformat/accueil.

[2] Nous avons travaillé en lesson study sur la tâche initiale, présente dans ESPER, avant l'errata de 2024.

élèves doivent dessiner les images de ces figures après deux symétries, l'une d'axe rouge, puis l'autre d'axe bleu. Ils disposent des fiches avec les consignes et de leurs instruments de géométrie.

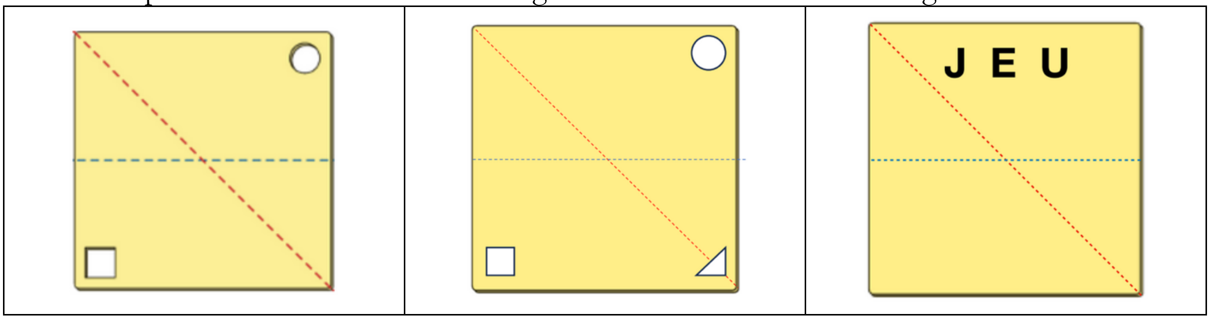


Fig. 2 : Les trois situations A, B et C (de gauche à droite) proposées aux élèves

Ces situations sont conçues pour faire émerger le débat mathématique entre les élèves et sont différentes quant à leur complexité. Nous considérons les variables didactiques suivantes :

(V1) nombre de figures sur le carré jaune : avec une ou deux figures, il est aisé de trouver des situations où la confusion entre symétrie et rotation (comme composition des deux retournements) est possible : avec plus de deux figures, il est plus difficile de trouver de telles situations ;

(V2) nature des figures : si les figures sont elles-mêmes symétriques (ex. carré ou cercle) et si leurs axes de symétrie sont parallèles aux axes rouge ou bleu, il est aisé de trouver des situations où la confusion entre symétrie et rotation (comme composition des deux retournements) est possible ; dans le cas où les formes ne sont pas des figures géométriques classiques (ex. lettres ou mots, objets réels), certaines propriétés de la symétrie axiale, comme la non-conservation de l'orientation, sont plus facilement perçues, par exemple le retournement d'une lettre ou d'un mot donne une image « à l'envers » ;

(V3) emplacement des figures sur le carré jaune : l'emplacement des figures dans les coins ou au milieu d'un bord du carré jaune facilite l'anticipation de l'emplacement des images des figures après retournement qui seront aussi dans des coins ou sur le bord ;

(V4) orientation des axes de symétrie : si les axes sont sécants, la composition des deux symétries est une rotation, s'ils sont parallèles, c'est une translation.

Pour concevoir les trois situations, nous considérons des combinaisons de ces variables, car elles ont des effets sur les conjectures que les élèves peuvent proposer.

Dans les trois situations, les axes de symétries sont sécants (V4). Pour la situation A (à gauche de la Fig. 2), le choix retenu est d'avoir deux figures (V1), ayant des axes de symétrie parallèles aux axes de symétrie rouge ou bleu (V2) et placées dans les coins opposés du carré jaune (V3). L'image après les deux retournements est obtenue par une rotation (axes sécants). Cette image paraît cependant, dans ce cas, la même que si l'on avait effectué uniquement une symétrie d'axe vertical. En comparant les figures de départ et celles obtenues après deux retournements, on attend la conjecture initiale suivante : la composition de deux symétries axiales d'axes sécants est une symétrie axiale. Ce choix a été fait pour favoriser le débat mathématique. Pour la situation B (au milieu de la Fig. 2), le choix retenu est d'avoir trois figures (V1), ces figures ayant un axe de symétrie parallèle aux axes de symétrie rouge ou bleu (V2) et placées dans trois coins (V3) du carré jaune. L'image obtenue après ces deux retournements est toujours une rotation (axes sécants), mais cette fois, l'image de la situation B par une symétrie d'axe vertical aurait donné une image différente. La composition des deux symétries ne prête plus à la confusion entre rotation et symétrie. Cette situation est pensée comme un contre-exemple qui permet d'invalider la conjecture initiale et de formuler une nouvelle conjecture : la composition de deux symétries axiales d'axes sécants n'est pas une symétrie axiale (c'est une rotation). Pour la situation C (à droite de la Fig. 2), le choix retenu est d'avoir le mot JEU (V2), un mot qui ne comporte pas d'axe de symétrie interne (V2), placé au centre d'un côté du carré jaune (V3). Dans ce cas, il n'y a pas non plus confusion entre rotation et symétrie (comme composition des deux retournements). De plus, l'image après le premier retournement n'est pas « lisible » (on voit bien le retournement de l'image, ce qui n'est pas le cas des figures géométriques précédentes). Cette situation permet donc de vérifier la seconde conjecture.

PLANIFICATION DE LA LEÇON

La mise en œuvre de la tâche a commencé avec l'anticipation de la mise en commun des procédures attendues des élèves et la planification du tableau (noir et/ou interactif) avec les éléments mathématiques attendus lors de la leçon. Nous avons ainsi anticipé pour chaque phase de la leçon ce que l'enseignant allait écrire au tableau ou projeter sur la partie interactive (Balegno et al., soumis). Cette méthode de préparation de leçon s'inscrit dans la lignée de travaux précédents de l'équipe (Batteau & Clivaz, 2023) et s'appuie sur la pratique japonaise du *bansho* (Tan et al., 2018 ; Yoshida, 2005).

L'enseignant commence à remplir le tableau sur la gauche, puis, progressivement la classe et l'enseignant remplissent le tableau vers la droite. La leçon se déroule en trois temps.

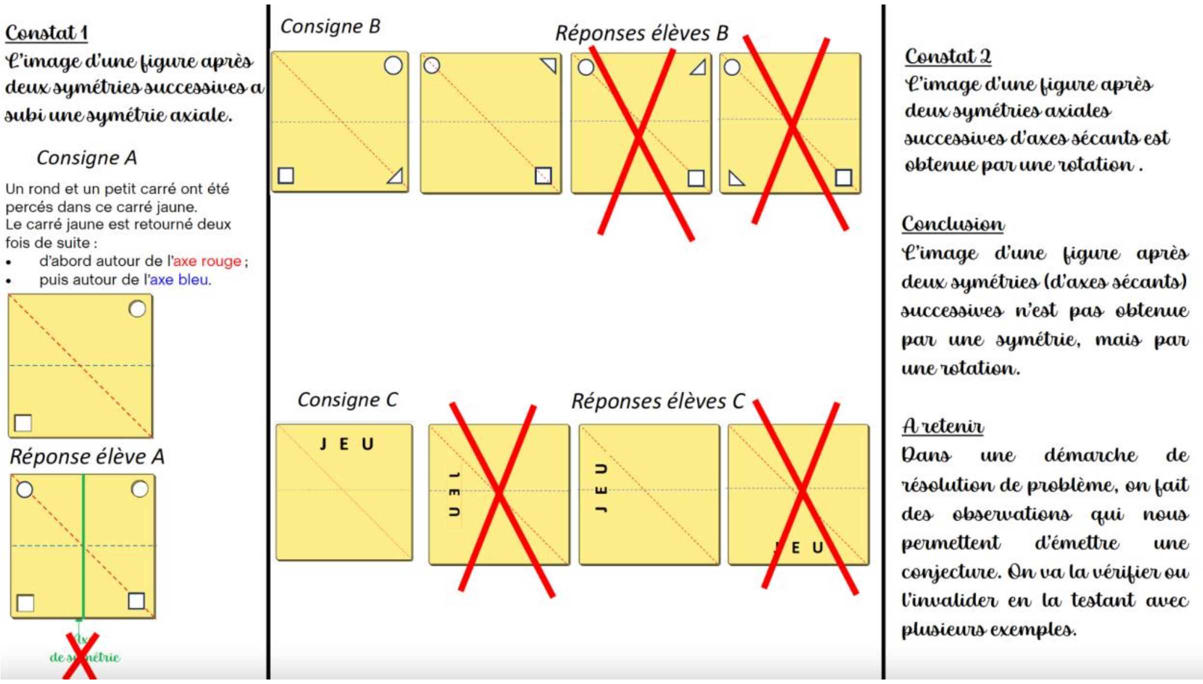


Fig. 3 : Tableau planifié pour la leçon

Il est à noter que chaque temps est précédé d'un moment de manipulation, de divers essais avec du matériel en lien avec la tâche. Il est à disposition si les élèves le demandent.

Temps 1. La consigne de la situation A (voir Annexe 2) est écrite avant le début de la leçon par l'enseignant. L'objectif est de permettre un moment de discussion entre pairs avec ce support visuel pour discuter de la proposition de l'élève. Les élèves ont ainsi la représentation de départ et une réponse proposée sous les yeux ; ce premier moment de discussion permet aux élèves d'expliquer comment passer de la première représentation à la seconde. Ils peuvent ainsi émettre une conjecture, qui est nommée « constat » en classe. Celui-ci est noté au-dessus de la consigne et doit faire consensus au sein de la classe. Si des élèves ne sont pas en accord avec un autre groupe d'élèves, ils défendent leur position. Le rôle de l'enseignant est primordial : il dirige d'abord le débat sans influencer les élèves, ensuite il retranscrit le constat de la classe, même incorrect, par exemple : « Si je fais deux retournements/symétries successifs, c'est comme si je faisais un seul retournement/symétrie ».

Temps 2. La partie centrale du tableau sert de support aux situations B et C (voir Annexes 3 et 4). Celles-ci sont projetées sur la gauche de l'écran ; trois carrés vierges sont insérés sur la droite de la figure originale pour l'activité B/C pour que les élèves puissent y noter leurs réponses. L'enseignant désigne trois élèves qui mettent leurs réponses et présentent leurs procédures. Il est important que ceux-ci notent leur réponse simultanément pour éviter qu'ils ne s'influencent mutuellement. L'enseignant sélectionne au préalable des productions différentes : un début d'argumentation requiert des réponses variées pour susciter le débat et la validation des réponses. Après avoir discuté les réponses et les procédures des élèves, l'enseignant organise une mise en commun pour mettre en relation le premier constat avec les réponses de la fiche B. Le débat peut alors émerger entre les élèves qui pensent que la succession de deux symétries est une symétrie et ceux qui vont remettre en doute ce constat. A l'issue du débat, le second constat est noté en haut, sur la partie droite du tableau, afin de mettre les deux constats l'un en face de l'autre pour montrer la contradiction. Il est attendu que le second constat soit de type : « Si je fais deux retournements/symétries de suite, ce n'est pas un retournement/symétrie » ou « Si je fais deux retournements/symétries de suite, cela peut être une rotation ». La fiche C vient ensuite, en bas du tableau central. Cette situation permet de vérifier le deuxième constat et de réfuter à nouveau le premier constat.

Temps 3. La partie droite du tableau comporte les éléments d'institutionnalisation possible de la leçon. L'enseignant a déjà noté le second constat en haut de cette partie et il doit désormais continuer le débat mathématique entre les élèves pour faire émerger les éléments à retenir de la situation. Les élèves voient leurs deux constats contradictoires (en haut à gauche et en haut à droite), et doivent argumenter pour réfuter l'un et vérifier l'autre. La conclusion mathématique est inscrite au centre du tableau de droite et doit faire consensus pour toute la classe. La conclusion porte sur des éléments mathématiques à institutionnaliser. L'équipe avait anticipé d'institutionnaliser des connaissances sur les transformations géométriques (« L'image d'une figure après deux symétries d'axes sécants n'est pas obtenue par une symétrie, mais peut l'être par une rotation ») ou sur des compétences de résolution de problèmes. L'enseignant met en avant, en bas à droite du tableau (Figure 3), ce qui est à retenir pour la démarche de résolution de problèmes. L'écriture de cette partie est à la charge de l'enseignant, la formulation des éléments à institutionnaliser peut se faire conjointement entre l'enseignant et les élèves.

La partie suivante illustre des éléments d'analyse de la conduite du débat mathématique par l'enseignante ou l'enseignant lors de la mise en œuvre en classe de la leçon.

MISE EN ŒUVRE DE LA LEÇON EN CLASSE

Nous avons testé cette tâche dans une classe de 8P de 19 élèves (désignés E1-19 dans la suite), à Pully, sur deux périodes consécutives. Les élèves avaient déjà vu les isométries et l'objectif principal de la leçon est centré sur le débat.

Lors du temps 1 autour de la situation A, les élèves travaillent par deux. Plusieurs procédures et réponses différentes apparaissent dans les groupes. Deux élèves émettent l'hypothèse que la figure a subi un glissement, une translation comme dans l'extrait ci-dessous.

> E1 : ça a fait ça pour moi, hop et hop.
>
> E2 : attends non, tu l'avais tourné [retourne le grand carré selon l'axe oblique]
>
> E1 : [retourne le grand carré selon l'axe oblique puis selon l'axe horizontal]
>
> E2 : donc tu fais un glissement, une translation.
>
> E1 : en soi, oui.

D'autres élèves trouvent des rotations d'angles 90° et 270°, ce que nous n'avions pas anticipé. Un seul groupe d'élèves trouve une symétrie axiale. Lors de la mise en commun, l'enseignant (désigné par ENS dans la suite) demande aux élèves de présenter leurs procédures et leurs réponses de la situation A. Une première élève présente sa procédure avec une rotation d'angle 90° et une autre élève avec une rotation d'angle 270°. Une troisième élève propose la symétrie.

> E3 : on a tourné à l'intersection des axes [l'élève fait tourner le grand carré jaune en même temps]. On tourne [tourne le grand carré jaune].
>
> ENS: très bien, donc c'est une rotation à partir du milieu du carré. De combien de degrés à peu près ?

E3 : [pivote le grand carré], je ne sais pas.

ENS: ah, elle ne sait pas combien elle a tourné.

E4 : 90 degrés.

ENS: 90 degrés. Bon, est-ce que tout le monde a mis ça ?

[...]

ENS: quelqu'un a mis autre chose qu'une rotation ? Je vais être plus précis dans les solutions trouvées.

[...]

E5 : si on met l'axe de symétrie ici [trace un axe de symétrie vertical], en miroir, si on le retourne, ça fait ça [montre le carré de départ], donc c'est juste.

ENS: C'est juste ? Elle [E5 au tableau] propose un axe de symétrie. [...] Elle dit bah tiens si je fais une symétrie axiale à partir de l'axe vert ici [l'enseignant montre au tableau noir l'axe vertical] et bien j'obtiens la solution finale. Est-ce que c'est vrai ? Oui, non ? Rotation, on en a parlé et elle [E5] nous dit qu'il y a une autre solution : symétrie axiale. Possible ou pas possible ? Possible d'avoir deux solutions d'un même problème ? Et du coup, symétrie axiale, vous validez ou pas ?

Élèves : Oui.

ENS: Bon.

Cet extrait illustre comment l'enseignant gère le débat en classe face à deux réponses différentes proposées par les élèves. Il ne valide pas les procédures et les réponses des élèves, renvoyant à la classe la responsabilité de valider le fait d'obtenir une symétrie après deux symétries successives.

L'équipe avait anticipé que cette mise en commun serve à émettre la première conjecture. Au vu des réponses données pendant la leçon, l'enseignant a dû modifier cette conjecture selon l'énoncé des élèves : « après deux retournements, on peut tomber sur différents degrés de rotation. On peut aussi trouver une symétrie axiale » (voir en haut à gauche de la Figure 4).

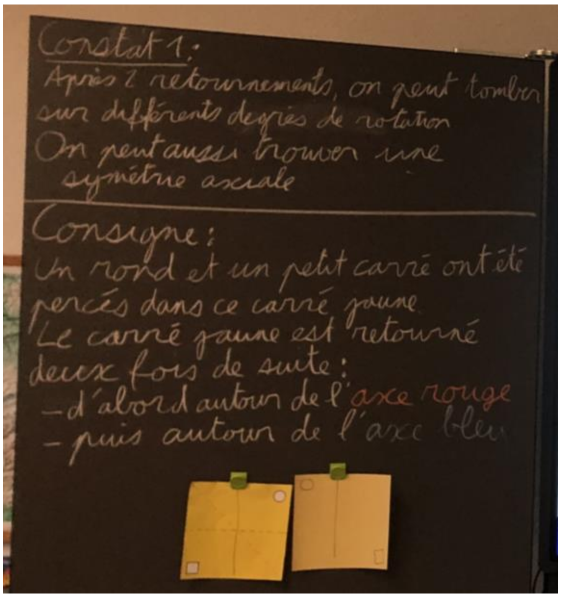


Fig. 4 : Partie gauche du tableau

Lors du temps 2, les élèves sont amenés à résoudre la situation B pour vérifier ou invalider cette conjecture. Durant la mise en commun, trois élèves choisis par l'enseignant ont tracé simultanément leurs réponses sur le tableau blanc au centre. L'enseignant amène le débat par la question suivante « Est-ce qu'il y a une solution qui n'est pas possible du tout ou est-ce que c'est autre chose ? »

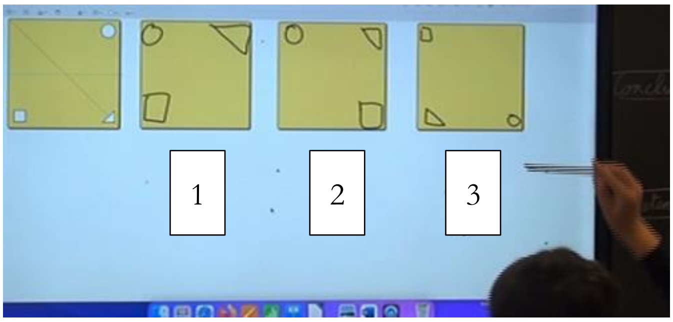


Fig. 5 : Tableau central projeté lors du débat du temps 2

Un élève va au tableau, retourne deux fois son carré jaune pour justifier que la solution $\boxed{2}$ est celle qui est correcte. L'enseignant désigne un autre élève de la classe et lui demande s'il est convaincu.

> E6 : dans le premier constat, on avait dit qu'on pouvait tomber sur différents degrés de rotations. En fait, ça dépend c'était toujours 270 de degré de rotation. Enfin, dans la solution $\boxed{2}$ de E7 le triangle par rapport à sa position de départ, il a fait trois coins. Donc c'est moins 270.
>
> Enseignant : donc c'est juste ?
>
> E6 : oui
>
> ENS: pour le triangle ? et pour les autres [le carré et le cercle] aussi ? Donc en fait, ces deux solutions [montre $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$] c'est bon, mais celle-ci [montre $\boxed{3}$] est invalidée ? [... ENS valide $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ avec des coches] Celle de gauche n'est pas juste avec ton argument ?
>
> E6 : oui, c'est pas possible.

E6 utilise le fait que les retournements reviennent à faire une rotation de centre d'intersection des axes vert et rouge et d'angle -270°. L'enseignant poursuit en demandant à une autre élève de justifier si les solutions proposées au tableau sont correctes.

> ENS: bon, on va écouter [E7] qui elle pense différemment.
>
> E7 : normalement l'alignement, c'est le carré, ensuite le triangle et ensuite le rond. Et là [Fig. 5 - $\boxed{1}$], c'est carré, rond et triangle.
>
> ENS: donc en fait, c'est toujours carré, triangle, rond. C'est ça que tu nous dis ?
>
> E7 : oui.
>
> ENS: du coup, carré, rond, triangle [Fig.5 - $\boxed{1}$], c'est pas le même alignement, ça marche pas. Ça te convainc comme argument ?
>
> E6 : oui

Dans cet extrait, E7 utilise la propriété de conservation de l'orientation par rotation. C'est-à-dire une figure et son image par rotation ont la même orientation.

> ENS: bon, et puis lui [Fig. 5 - $\boxed{3}$] du coup, carré, triangle, rond, donc il est bon aussi celui-là [montre $\boxed{3}$ sur Fig. 4] ? Du coup, il y a deux solutions ? [à E8]

E8 montre à partir de la situation de départ (carré à gauche) les images successives des figures après un puis deux retournements. Il utilise ainsi une procédure d'anticipation mentale des images des figures par symétrie.

> E9 : si on reprend depuis le début, on tourne d'abord selon le rouge, le carré se retrouve ici [en haut à droite du carré jaune] et le rond se retrouve ici [en bas à gauche du carré jaune] et le triangle bouge pas, vu que ça se retourne sur lui-même. Et ensuite du coup, le rond il monte là [en haut à gauche sur le

carré jaune], et le carré il descend [en bas à gauche sur le carré jaune] et le triangle il monte [en haut à droite sur le carré jaune].

ENS: du coup, il y a qu'une seule solution. Oui ?

E9 : oui.

ENS: vous êtes d'accord avec ce qu'il a dit ? Tu n'es pas d'accord, vas-y. [...]

Le temps 2, comme anticipé, permet d'invalider le fait que deux retournements successifs reviennent à réaliser une symétrie (une partie du constat 1) et à faire émerger le constat 2 : deux retournements successifs reviennent à réaliser une rotation.

Lors du temps 3 comme prévu, l'enseignant choisit trois élèves pour tracer leurs solutions au tableau pour la situation C avec les lettres JEU. Il les amène à présenter leurs différentes procédures. Il anime ensuite le débat avec pour objectif de réfuter une seconde fois le premier constat et de vérifier le second.

Dans la suite de la leçon, comme anticipé, l'enseignant reprend la conjecture du début et fait venir des élèves au tableau pour discuter des images par une symétrie d'axe vertical avec les situations B et C. Il met alors en lumière le rôle du contre-exemple pour réfuter une conjecture.

Lors de la fin de la leçon, l'enseignant demande aux élèves ce qu'ils pourraient retenir. Des élèves répondent qu'ils « ont fait des maths », « ils ont réfléchi », ils ont fait des « raisonnements », des « constats ». L'enseignant nomme conjectures les constats faits par les élèves. Il institutionnalise à l'écrit (Fig.6) et à l'oral qu'un contre-exemple suffit pour invalider une conjecture, c'est-à-dire pour montrer qu'une conjecture est fausse.

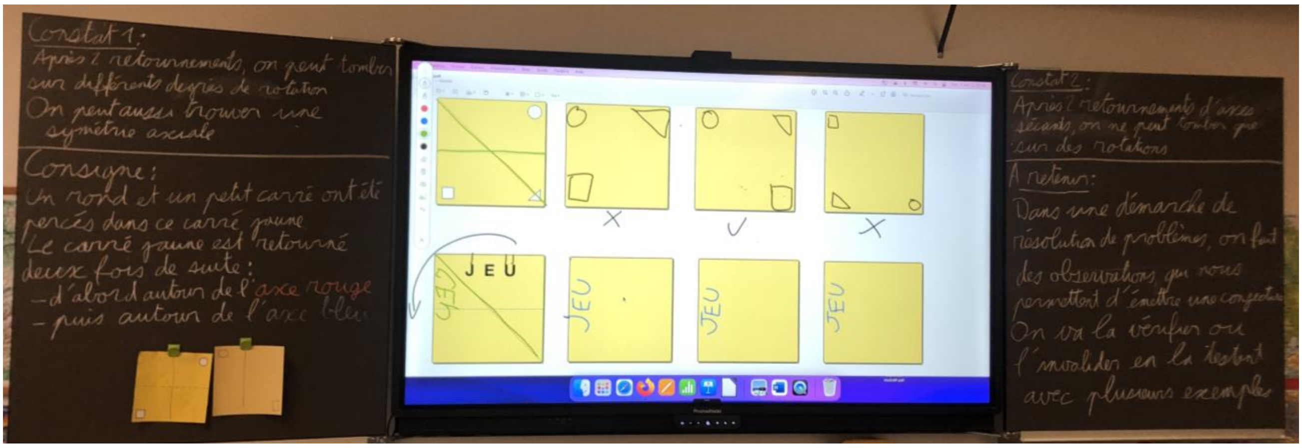


Fig. 6 : Tableau à la fin de la leçon

Discussion et conclusion

En comparant le tableau planifié (Fig. 3) et le tableau réalisé (Fig. 4), nous observons que globalement la préparation avec la trame a été respectée. Néanmoins, les proportions du tableau utilisé ont contraint l'enseignant d'aligner horizontalement la figure initiale et la réponse en papier sur la partie de gauche du tableau, plutôt que de les mettre verticalement. Ce simple changement a eu des effets inattendus sur les réponses des élèves. En effet, l'un d'entre eux a placé un axe de symétrie entre la figure initiale et sa réponse, il a ainsi imaginé une symétrie axiale entre ces deux représentations, ce qui d'un point de vue perceptif est correct, mais qui ne répond pas à la question originale.

Un autre changement a porté sur la différence entre la première conjecture attendue qui portait uniquement sur la symétrie axiale et la première conjecture réalisée proposant des rotations avec différents angles et une symétrie axiale. La première conjecture réalisée combinait les deux conjectures planifiées par l'équipe, l'enseignant a dû improviser pour faire porter le débat sur une partie de la première conjecture (symétrie).

On voit également que la partie de droite du tableau n'a pas respecté entièrement la préparation. En effet, le second constat et la conclusion étant très proches, il a été superflu d'ajouter une conclusion.

L'organisation et l'anticipation du tableau ont permis de faciliter l'entrée dans le débat de la part de tous les élèves. Cela peut s'expliquer par le fait que décrire des transformations géométriques avec des supports visuels (tableau et carrés agrandis) facilite la compréhension des arguments des uns et des autres. Les éléments importants prévus étaient présents visuellement, ceci a facilité les divers moments de mise en commun et le débat. Comme l'ont montré Batteau et Clivaz (2023), la préparation des mises en commun a été le point clé de la réussite de cette leçon. Une préparation minutieuse de la tâche au tableau a été nécessaire pour faciliter le dialogue entre les élèves et s'est avérée un bon soutien pour l'enseignant dans le déroulement de sa leçon et dans le maintien des objectifs à atteindre.

La crainte de ne pas maîtriser le contenu des interventions des élèves, de ne pas pouvoir anticiper toutes les relances possibles peut bloquer les enseignants dans la mise en œuvre d'un débat mathématique en classe. Cette incertitude les déstabilise dans leur posture habituelle, ils doivent pouvoir rebondir sur les interactions imprévues des élèves et accepter des possibles qu'ils n'avaient pas envisagés. Par ailleurs, le débat mathématique a l'avantage de se situer sur des objets abstraits, l'affect personnel d'un individu n'est pas mis en jeu lors de ce type de débat. Ce dernier laisse place à une plus grande liberté d'expression des élèves, les valeurs d'un individu n'entrant pas dans ce type de débat.

À l'instar de tout apprentissage, cet objectif demande un entraînement régulier afin de développer une nouvelle posture des élèves et de l'enseignant.

En plus de l'entraînement au débat, ce type d'enseignement mène à la formation générale qui ne relève

> pas uniquement des disciplines scolaires et qui [fait] partie du projet de formation de l'élève. Notamment, elle rend visibles des apports éducatifs et met en évidence, entre autres, l'importance d'initier les élèves, futurs citoyens, à la complexité du monde, à la recherche et au traitement d'informations variées et plurielles, à la construction d'argumentations et au débat (CIIP, 2010a).

BIBLIOGRAPHIE

Balegno, M., Batteau, V., Bünzli, L.-O., Ceria, J., & Daina, A. (soumis). Des lesson study pour se coformer et constituer une équipe de formatrices et formateurs d'enseignant·es en mathématiques.

Batteau, V., & Clivaz, S. (2023). De la mise en commun à la mise en dialogue. *RMé, 239*, 27-39. https://doi.org/10.26034/vd.rm.2023.3624

Bergé, A. (2016). Déployer un raisonnement mathématique au secondaire : problèmes ouverts, formulation de conjectures et gestion de la classe. *Bulletin AMQ, 56*(4), 44-66.

Clivaz, S. (2015). Les Lesson Study ? Kesako ? *Math-Ecole, 224*, 23-26. http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/224-Clivaz.pdf

Conférence intercantonale de l'instruction publique. (2010a). Formation générale. In *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/pages/247

Conférence intercantonale de l'instruction publique. (2010b). Lexique Mathématiques et Sciences de la nature. In *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/domains/2

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique. (2010c). MSN 21 – Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace. In *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/learning-objectives/57

Conférence intercantonale de l'instruction publique. (2010d). *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/domains

Corminboeuf, I. (2024). *Aide-mémoire Mathématiques 9-10-11. Savoirs, savoir-faire et stratégies.* (LEP, Ed.). CIIP. https ://e.maths-m.ch/contenu/am/2019/index.php ?file=AM253.pdf

Corminboeuf, I., Mante, M., & Schild, H. (2019). *Aide-mémoire. Savoirs, savoir-faire et stratégies. Mathématiques 9-10-11* (LEP, Ed.). CIIP.

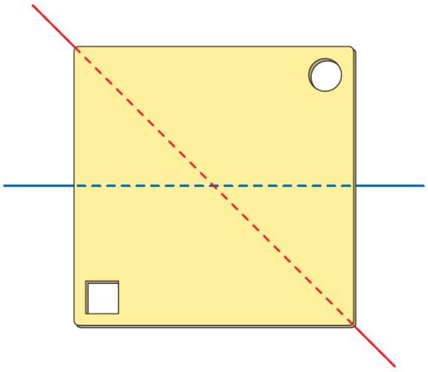
Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM, 10*, 123-159.

Tan, S., Fukaya, K., & Nozaki, S. (2018). Development of bansho (board writing) analysis as a research method to improve observation and analysis of instruction in lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies 7*(3), (230-247). https://doi.org/10.1108/IJLLS-02-2018-0011
Yoshida, M. (2005). Using Lesson Study to Develop Effective Blackboard Practices. In P. Wang-Iverson & M. Yoshida (Eds.), *Buiding Our Understanding of Lesson Study* (pp. 93-100). Research for Better Schools.

Annexe 1 Tâche originale ESPER *Après deux retournements* (avant l'errata 2024)

7e / Espace / Transformations géométriques

E - F 63 Après deux retournements

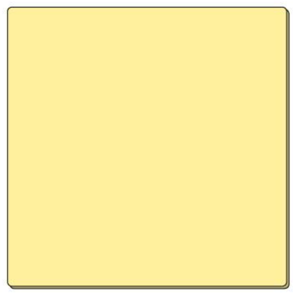


Un rond et un petit carré ont été percés dans ce carré jaune.

Le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

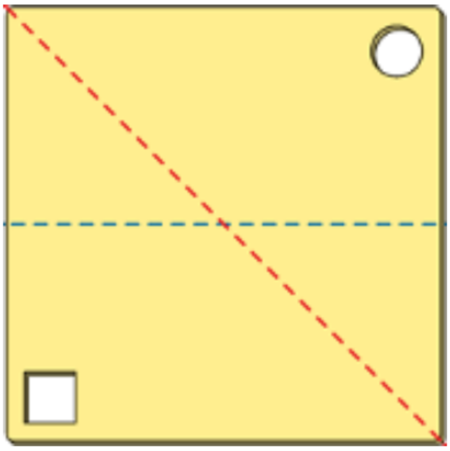
1. Dessine sur le carré ci-contre les emplacements du rond et du petit carré après ces deux retournements.
2. Dessine en vert sur le carré ci-contre l'axe de symétrie qui permet de passer de la position que tu as trouvée à celle du début en un seul retournement.



https://www.ciip-esper.ch/#/sequence/183/activite/4097/ressource/TYPE_MATH_ACTIVITE

Annexe 2 Fiche A, tâche *Après deux retournements* modifiée

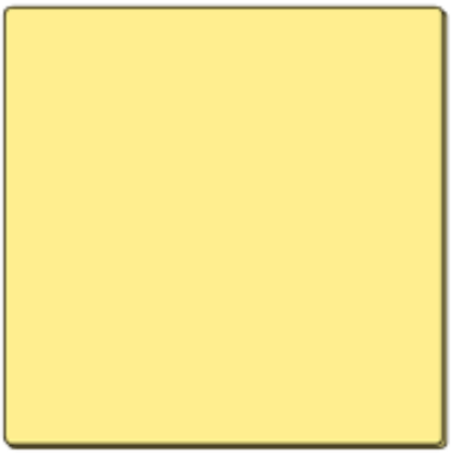
Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche A)



Un rond et un petit carré ont été marqués dans ce carré jaune.
Le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

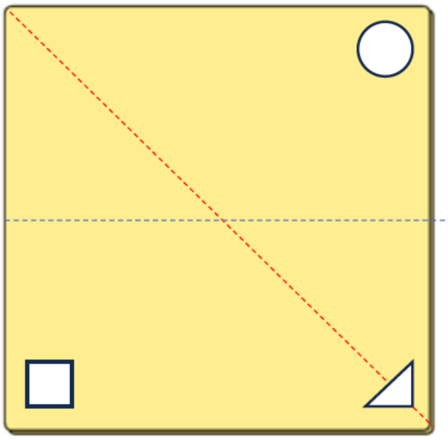
Dessine sur le carré ci-dessous le rond et le petit carré après ces deux retournements.



Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

Annexe 3 Fiche B, 1er prolongement de l'activité *Après deux retournements* modifiée

Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche B)

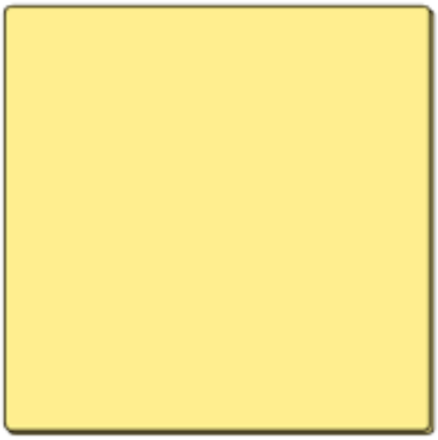


Un rond, un petit carré et un triangle ont été marqués dans le carré jaune.

Comme dans la fiche précédente, le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

Dessine sur le carré ci-dessous le rond, le petit carré et le triangle après les deux retournements.

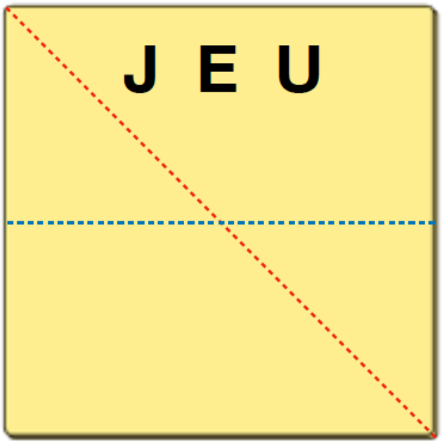


Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

____

Annexe 4 Fiche C, deuxième prolongement de l'activité *Après deux retournements* modifiée

Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche C)

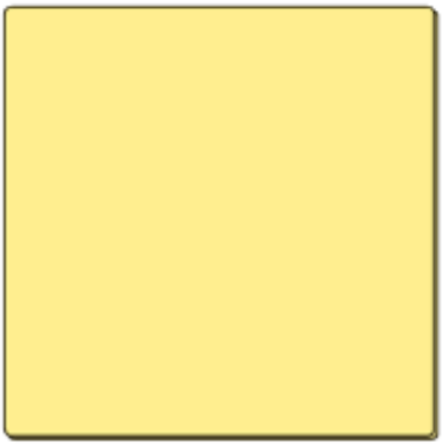


Les trois lettres J, E et U ont été marquées dans le carré jaune.

Comme dans les fiches précédentes, le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

Dessine sur le carré ci-dessous les trois lettres après les deux retournements.

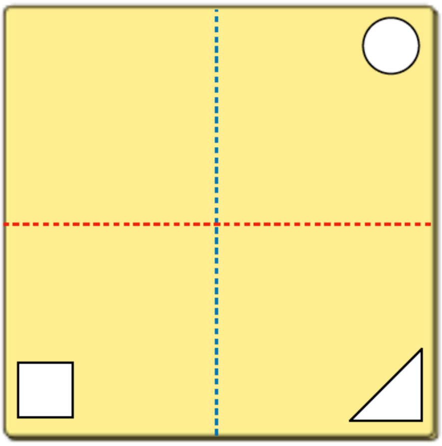


Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

Compare les trois situations que tu as trouvées et partage tes observations.

Annexe 5 Fiche B', différenciation de la fiche B pour les élèves ayant fini plus vite avec facilité

Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche B')

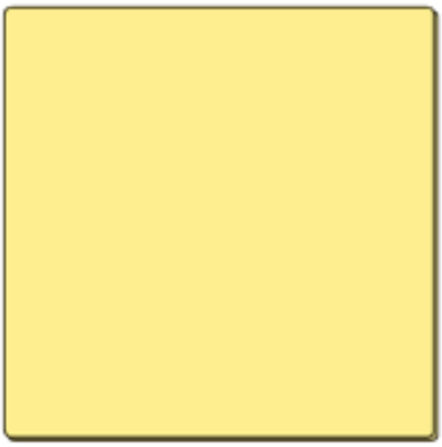


Un rond, un petit carré et un triangle ont été marqués dans le carré jaune.

Comme dans la fiche précédente, le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

Dessine sur le carré ci-dessous le rond, le petit carré et le triangle après les deux retournements.

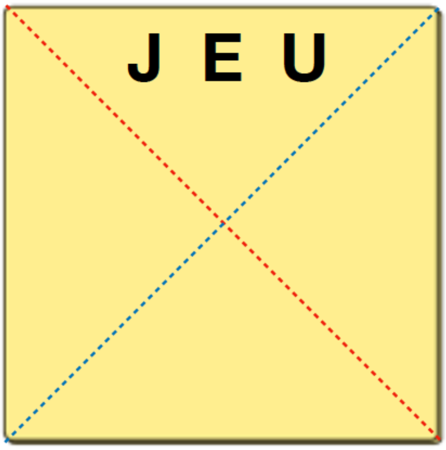


Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

____

Annexe 6 Fiche C', différenciation de la fiche B pour les élèves ayant fini plus vite avec facilité

Adapté de E-F63 - Après deux retournements (Fiche C')

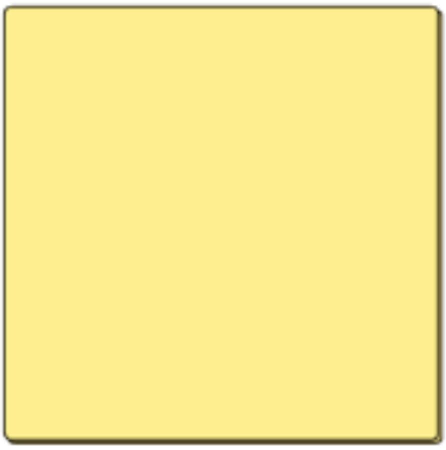


Les trois lettres J, E et U ont été marquées dans le carré jaune.

Comme dans les fiches précédentes, le carré jaune est retourné deux fois de suite :

- d'abord autour de l'axe rouge ;
- puis autour de l'axe bleu.

Dessine sur le carré ci-dessous les trois lettres après les deux retournements.



Quelle transformation permet de passer de la situation que tu as trouvée à celle du début ?

UNE EXPERIMENTATION PORTANT SUR DES ESTIMATIONS DE QUANTITES ET GRANDEURS

Isabelle Dubois et Florence Soriano-Gafiuk

Institut Elie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine

Résumé. Cet article présente une expérimentation menée auprès d'élèves de 9 à 10 ans. Trois activités les invitent à estimer combien de girafes, de gazelles et d'hirondelles pourraient tenir dans la classe, en respectant de manière subjective un certain confort aux animaux. L'objectif est de rendre compte des réussites et difficultés d'élèves confrontés pour la première fois à ce type de situations.

Mots clés : estimation, Fermi, argumentation.

INTRODUCTION

Dans Loretan et al. (2018) portant sur le raisonnement semi-quantitatif en sciences, les auteurs soulignent l'importance de développer chez les élèves le sens des ordres de grandeur. Ils précisent que les activités d'estimation – clairement inscrites dans le Plan d'études romand 2024 – favorisent le lien entre mathématiques et sciences, un lien « si fondamental qu'il est essentiel de le développer le plus vite possible afin de le rendre intuitif » (*Ibid.*, p. 15). Quantifier le *monde propre à la vie*[1] est une compétence mobilisée régulièrement, chacun étant amené, souvent sans en être conscient, à faire des estimations. Pourtant, l'estimation reste « un des domaines de compétences les plus négligés dans les programmes de mathématiques » (Loretan et al., 2018, p. 19). Son enseignement est jugé « souvent superficiel et donc insuffisant pour construire des compétences appréciables » (*Ibid.*), et les élèves comme « de pauvres estimateurs » (*Ibid.*). En France, bien que les programmes en vigueur depuis 2002 valorisent cette pratique, Sirieix (2023) conclut que les élèves sont peu familiers avec l'estimation de grandeurs, qu'ils possèdent une culture arithmétique faible et que les manuels scolaires offrent peu d'activités en lien avec l'estimation. L'année suivante, deux séries de problèmes (qualitatifs et quantitatifs) ont été publiées (Soriano-Gafiuk, 2024a ; 2024b), portant sur les grandeurs et les quantités, avec des propositions d'application, mais sans expérimentation en classe. Les pages suivantes visent à combler ce manque en identifiant des points de vigilance pour la mise en œuvre de tâches d'estimation dans un contexte de première découverte. Étant donné que ces tâches mobilisent des compétences spécifiques (mesures de référence, comparaisons mentales, argumentation, ajustement du degré de précision), une attention particulière sera portée à ces aspects.

ESTIMATION ET PROBLÈMES DE FERMI

Cette section est fortement inspirée des éléments présentés plus en détails dans Soriano-Gafiuk (2024a, 2024b).

L'estimation d'une collection[2] ou d'une grandeur est faite sans recourir à des instruments de comptage ou mesurage, mais en s'appuyant sur le rappel en mémoire de valeurs de référence (dans des systèmes d'unités standards) et sur la perception (souvent visuelle), afin de pouvoir opérer des comparaisons mentales.

[1] *Le monde propre à la vie* est un concept philosophique qui oppose « le monde tel qu'il se donne » et le « monde exact construit par les sciences modernes de la nature » (Farges, 2006, p. 192).

[2] Il s'agit en général de collections partiellement cachées.

Une estimation quantitative se présente comme une valeur numérique. Lorsqu'elle concerne une longueur, elle peut aussi être obtenue par report d'unités non standards (par exemple, fournies par les parties du corps), soit des étalons saisis dans le système métrique décimal via des estimations quantitatives. Ces reports sont opérés mentalement mais peuvent aussi l'être, surtout en début d'apprentissage, par le geste (comme matérialisation de la tâche mentale). Dans tous les cas, une estimation quantitative est moins précise que les valeurs recueillies à l'aide d'instruments et se présente davantage comme une valeur numérique « qui utilise des nombres les plus simples possibles » (Sirieix, 2023, p. 87). Il s'agit donc d'un ordre de grandeur dont la précision dépend du contexte.

Une estimation qualitative d'une collection ou d'une grandeur consiste à élaborer une comparaison mentale qualitative avec une autre quantité ou grandeur de même nature. Elle prend la forme de formules du type : aussi/plus/moins nombreux, aussi/plus/moins grand... Au besoin, le geste peut venir en appui (comme matérialisation de la tâche mentale).

Enfin, un problème de Fermi[3] est un problème d'estimation dont l'énoncé n'apporte aucune donnée numérique. Au niveau de l'école élémentaire, son traitement est pensé comme une tâche courante du *monde propre à la vie*. Il doit être rapide et ne s'appuyer que sur des calculs élémentaires (réalisables mentalement). Le recours aux instruments, les recherches sur internet et l'audition d'experts ne sont pas autorisés. La modélisation peut l'être, surtout en début d'apprentissage, lorsque les élèves peinent encore à intérioriser des images mentales.

Description succincte de l'expérience

Présentation de la classe

L'expérimentation a été menée par les deux auteures dans une école primaire française, auprès de 23 élèves de 9-10 ans. Audrey Cruciani, professeure de la classe, décrit ses élèves comme étant très enthousiastes, mais ayant un niveau hétérogène. L'animation s'est déroulée pendant trois heures. Une partie des élèves avait participé, en mai 2024, à une expérimentation sur le mesurage d'objets et de la salle avec des unités non-standards comme l'empan et standards comme le mètre. Les situations étudiées ici semblaient sans lien avec ces activités. Elles révèleront pourtant le contraire.

Le problème contextualisé et ses modalités de traitement

L'histoire suivante est racontée aux élèves en prenant appui sur un diaporama illustré.

L'école s'est transformée en vaisseau spatial, prêt à partir pour l'exo-planète AMI-42 ! Là-bas, les Aminox, une forme de vie intelligente, nous attendent avec impatience, ravis de nos premiers échanges. Les Aminox souhaitent accueillir et sauvegarder certaines espèces animales de la Terre. L'environnement de la planète AMI-42 étant idéal pour accueillir tout écosystème terrien, nous avons accepté. La salle de classe servira d'espace pour le transport d'une espèce animale, sachant que tout est prévu pour que les animaux voyagent dans de bonnes conditions. Les Aminox nous ont transmis des photos des animaux qu'ils souhaitent accueillir. Pourra-t-on les installer dans la salle de classe ? Et si oui, combien d'animaux peut-on installer ? On ne remplit la classe qu'avec une seule espèce animale, en prévoyant un espace suffisamment grand entre chaque animal afin de leur assurer un certain confort.

[3] Enrico Fermi (1901-1954) était un physicien italien, récipiendaire du Prix Nobel, qui avait l'habitude de soumettre de tels exercices à ses étudiants.

La question posée est un problème de Fermi. Elle est donc très ouverte, laissant même place à la subjectivité concernant les notions de « confort » et « d'installation ». Selon l'espèce (girafe, gazelle, hirondelle), les dispositions dans la salle et les grandeurs considérées varieront. Pour aider les élèves peu familiers à ce type d'activité, le geste sera autorisé comme appui aux comparaisons mentales, et des modélisations préparées en amont par les auteures sont prévues, transformant le problème initial en une question semi-ouverte.

Même s'il s'agit d'estimer des quantités, le traitement des trois cas exige d'opérer des comparaisons de grandeurs. Des vidéos ou encore des photographies prises au Muséum national d'Histoire Naturelle à Paris seront projetées. La séance s'appuiera ainsi sur des clichés d'Isabelle, l'une des auteures, debout à côté des animaux empaillés (les deux ongulés) et sur un film montrant une hirondelle – absente des collections exposées.

Le lancement de l'activité

En début de séance, les auteures saluent les élèves et se présentent comme Isabelle et Florence. Les premières consignes sont données : les instruments de mesure doivent être rangés, tout comme les calculatrices. Enfin, la coopération entre élèves étant souvent encouragée dans les tâches d'estimation (Soriano-Gafiuk, 2024a), leur professeure forme rapidement six groupes.

La girafe

Organisation de l'activité

Fig. 1 : A côté de la girafe

L'objectif de l'activité est de répondre à la question : *Une girafe rentre-t-elle dans notre salle du vaisseau spatial ?* Pour ce faire, la hauteur de la girafe devra être considérée comparativement à la hauteur du plafond de la salle.

Une vidéo sera d'abord projetée : elle montrera une girafe broutant la cime d'un arbre, et en fond d'écran une maison semblant moins haute que l'ongulé. À l'issue de la visualisation, l'image ci-contre (Fig. 1) sera affichée.

Les élèves rassemblés en petits groupes chercheront des arguments suffisamment convaincants pour persuader le reste de la classe de la plausibilité des réponses.

Si besoin, des précisions seront apportées sur un implicite de la question posée : une girafe doit pouvoir se tenir debout dans la salle.

DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ

Sans chercher à justifier leurs propos, les élèves répondent spontanément par la négative. Il a donc été nécessaire de canaliser leur énergie pour les placer en situation de recherche d'arguments : « Utilisez ce que vous savez, souvenez-vous de la vidéo, regardez l'image projetée ». Au final, plusieurs groupes d'élèves ont assez vite réussi à élaborer un argumentaire, partant du principe que la girafe devait être installée sans être contrainte de plier son cou. Il s'agissait donc de comparer les hauteurs du plafond et de l'ongulé.

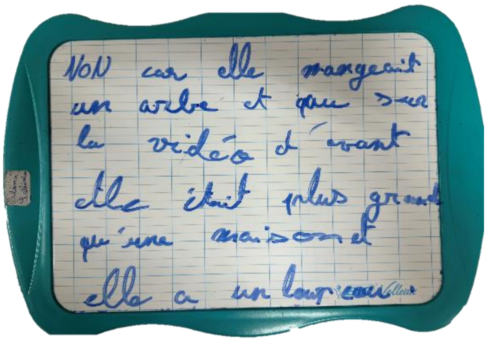


Fig. 2 : Argumentation d'un élève

Pour cette première production (Fig. 2), le groupe d'élèves s'est appuyé sur la vidéo. Il a mobilisé à la fois sa perception (la girafe semble plus grande que la maison) et son expérience de la vie (une maison n'entre pas dans une classe). Il a ainsi établi un argumentaire en deux chaînons, utilisant en quelque sorte une propriété de transitivité. L'argumentaire indique ensuite que la girafe a un long cou, mais cette précision n'apporte rien au raisonnement.

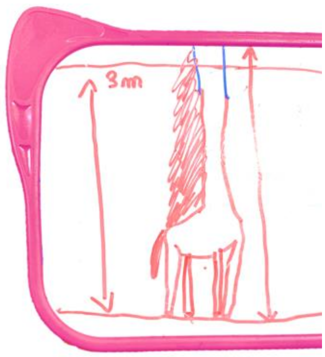


Fig. 3 : Réflexion par le dessin

Pour cette seconde production (Fig. 3), le groupe a choisi de représenter la situation à l'aide d'un dessin. La hauteur de 3 mètres a été reportée sur le schéma. Interrogés, les élèves ont répondu qu'ils avaient, l'an dernier, mesuré la hauteur du plafond et qu'ils se souvenaient du résultat. L'argumentaire ne peut cependant aboutir sans information sur la taille de la girafe.

Lors de la mise en commun, les élèves ont rapidement compris qu'ils devaient se référer au cliché représentant Isabelle à côté de la girafe (Fig. 1). Même si des hésitations ont été ressenties, certains estimant à vue d'œil ou par le geste[4] que la girafe était seulement deux fois plus grande qu'Isabelle, un consensus a finalement émergé autour de trois fois. Le problème était à présent d'estimer la taille d'Isabelle. L'élève E. expliqua qu'elle mesurait 1,43 m. Elle se plaça ensuite debout à côté d'Isabelle et fit un geste correspondant à un empan au-dessus de sa propre tête. La classe nota alors qu'il y avait un empan de différence entre les tailles des deux personnes, si bien qu'Isabelle devait mesurer environ 1,63 m, soit en arrondissant 1,60 m – ce qui correspond à la réalité. L'estimation de la taille de la girafe ne posa aucun problème : la hauteur de l'ongulé était à peu près 3x1,6 = 4,8 mètres. L'argumentaire était à présent complet : la girafe ne peut entrer dans la classe puisqu'elle mesure environ 4,8 mètres et que le plafond a une hauteur de 3 mètres. La différence entre 4,8 m et 3 m est assez grande pour que la réponse puisse être validée sans risque d'erreur.

Comme ce cas l'illustre, résoudre des problèmes d'estimation suppose de développer des compétences d'argumentation (Soriano-Gafiuk, 2024a). Pour cette raison, un focus sur cette question est proposé avant d'aborder le cas d'un autre animal.

À propos de la compétence *argumenter*

En Suisse romande, dans le domaine des *Mathématiques* et *des Sciences de la nature*, la pratique du débat basé, entre autres, sur l'élaboration d'argumentations est explicitement mentionnée dans le Plan d'études romand. En France, la compétence correspondante, parmi les six majeures de l'activité mathématique, n'est pas *argumenter*, mais *raisonner*. Or, si les deux nécessitent des énoncés-tiers, leurs objectifs diffèrent. « L'argumentation vise en effet à convaincre un public cible de la validité d'un propos en faisant appel à sa raison et en s'appuyant sur des énoncés qui ne peuvent être mis en doute. » (Soriano-Gafiuk, 2024a, p. 17). Elle est en effet un mode de raisonnement « intrinsèquement lié à l'utilisation de la langue naturelle » (Duval, 1992-1993, p. 59), spontanément mobilisé tant « dans des situations de discussion réelle » que « dans des situations d'interrogation ou de recherche » (*Ibid.*).

Lors du traitement d'un problème de Fermi, l'argumentation est au centre l'activité. Les élèves doivent en effet justifier leurs choix en termes de stratégies, d'hypothèses et d'éléments de comparaison.

La gazelle

Organisation de l'activité

L'objectif de l'activité est de répondre à la question : *Combien de gazelles peuvent-elles être installées confortablement dans la salle de classe ?* Pour ce faire, les trois grandeurs hauteur, largeur et longueur de la gazelle devront être considérées comparativement aux dimensions de la salle.

Trois temps seront prévus : argumentation sur la possibilité d'installer des gazelles dans la salle, recherche par groupes et choix collectif sur l'organisation pratique de cette installation, puis estimation de la quantité de gazelles accueillies.

[4] Le geste consiste à tenir les mains avec un écart correspondant à la hauteur d'Isabelle sur le cliché, et à reporter cet écart (donc deux fois) le long de la girafe. Un élève avait été envoyé au tableau pour réaliser cette manipulation.

Fig. 4 : À côté d'une gazelle

Pour commencer, une photographie sera projetée, figurant Isabelle à côté d'un tel animal (Fig. 4). Les élèves devront alors répondre à la question intermédiaire : *Une gazelle rentre-t-elle dans la salle du vaisseau spatial ?* La réponse est affirmative et simple à argumenter (en prenant appui sur des comparaisons), un échange collectif devrait rapidement y conduire. La hauteur sera alors écartée, ramenant ainsi le problème à une situation 2D. Une seconde photographie montrera des gazelles éparpillées dans la savane, et sera accompagnée de la nouvelle question : *Comment allez-vous placer les gazelles dans la salle ?* Un temps de recherche en groupes sera lancé, avec distribution du matériel en papier (trente rectangles figurant chacun une gazelle et une feuille A4 symbolisant la salle) dont les dimensions sont non proportionnelles aux dimensions réelles – la proportionnalité ramènerait l'activité à un simple comptage ou dénombrement (exact), et non à une situation d'estimation.

Les élèves devront imaginer une disposition permettant de faire entrer le plus de gazelles possibles tout en garantissant un confort individuel (notion subjective) – il s'agira donc d'effectuer une sorte de recouvrement partiel de la feuille A4. Chaque groupe présentera ensuite sa production et annoncera le nombre de gazelles collées sur le papier. Le pari est fait qu'émergeront des productions raisonnables et structurées, qui pourront être adaptées à la situation pseudo-réelle étudiée. Les productions seront collectivement critiquées afin d'aboutir à un choix d'organisation des gazelles dans la classe.

Fig. 5 : Longue d'une envergure

Enfin, après un temps de recherche en groupes, les élèves devront estimer le nombre de gazelles pouvant être placées dans la classe selon cette organisation. Une nouvelle diapositive sera projetée avec deux photographies : l'une pour estimer la longueur d'une gazelle (Fig. 5) et l'autre sa largeur (Fig. 4), à chaque fois comparativement à Isabelle. Les élèves seront ainsi amenés à estimer en prenant appui sur leurs propres corps. À cette fin, ils seront libres de se déplacer afin de comparer les dimensions 2D de la gazelle et de la salle de classe. Un bilan collectif terminera l'activité.

DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ

Les élèves apportent très vite des réponses argumentées à la première question en s'appuyant sur des comparaisons mentales faites à partir des deux photographies. Il apparaît qu'une gazelle a à peu près la même taille qu'Isabelle (Fig. 4), et peut donc entrer, en hauteur, par la porte. Il en va de même pour la largeur (Fig. 4). Isabelle interroge ensuite la classe sur la longueur de l'animal, une dimension non abordée spontanément. Les élèves estiment alors que cette longueur est à peu près égale à l'envergure d'Isabelle.

La seconde phase est sans lien immédiat avec la première : elle porte sur le style de disposition des ongulés dans la salle, retenu pour la suite de l'activité. Il s'agit donc d'un problème 2D, les gazelles ne pouvant être entassées les unes sur les autres. Après un temps long de manipulation, les six groupes viennent présenter leurs productions – trois d'entre elles sont ci-dessous insérées.


Fig. 6 : Production orange

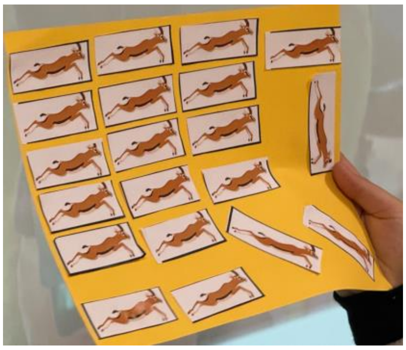


Fig. 7 : Production jaune

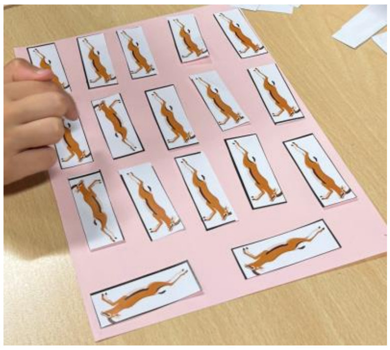


Fig. 8 : Production rose

Apportons quelques remarques. Premièrement, comme prévu, les élèves ont structuré l'espace : ils ont intuitivement compris qu'un aménagement en lignes et colonnes permettrait d'accueillir plus de bovidés. Deuxièmement, les effectifs varient de 17 à 30 gazelles collées, trois groupes en ayant placé entre 27 et 30, les trois autres entre 17 et 20. Troisièmement, la figure 7 appelle des commentaires : ce groupe a d'abord organisé les gazelles en rangées, puis, réalisant à mi-travail le manque d'espace pour leur confort, a collé les dernières gazelles de manière plus aléatoire. D'une manière générale, les groupes se sont trop précipités pour agir, sans prendre le temps de réfléchir à la meilleure stratégie.

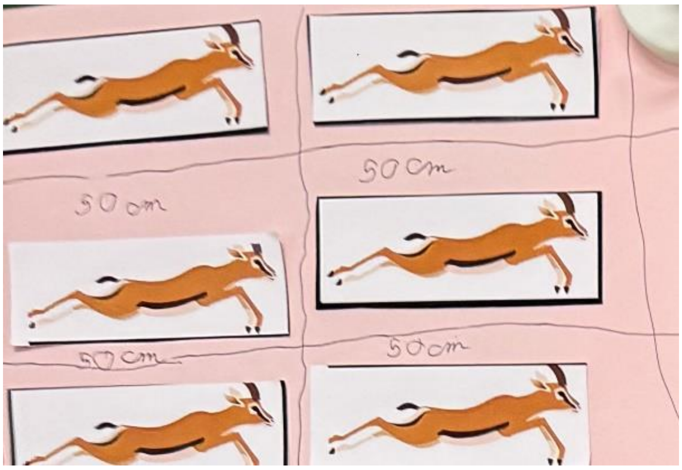


Fig. 9 : Quantification des espacements entre deux gazelles

Lors de la restitution, le choix pédagogique est fait de donner la parole en dernier au groupe dont la production semble la plus pertinente (Fig. 8). Collectivement, la classe s'accorde à dire que les gazelles sont trop serrées dans les autres cas. La production du dernier groupe est donc choisie et accrochée au tableau. La disposition est facile à reproduire en ne conservant que l'idée des alignements (sont laissées de côté les deux gazelles « bouche-trou »). Le groupe auteur de cette production (Fig. 8) a même représenté et quantifié un espacement entre deux gazelles (Fig. 9).

Par un vote, il est décidé d'aligner les gazelles les unes derrière les autres selon la largeur de la salle, mais aussi de laisser des espaces de confort entre les animaux, sans toutefois retenir à ce niveau de l'expérience une quantification précise des dits espaces. Les figures 4 et 5 sont de nouveau projetées et le dernier temps de recherche par groupes débute. Les élèves doivent déterminer combien de gazelles seront alignées sur une largeur de salle (en décidant quel espace prévoir entre un derrière et une tête), et combien de telles rangées peuvent être placées dans la longueur de la salle (en prévoyant un espace entre deux rangées). Assez vite, des élèves arpentent la salle, ne faisant pas tous les mêmes gestes. Certains comptent le nombre de pas dans le sens de la largeur ou de la longueur de la salle, sans relier ces actions aux informations disponibles. La décision est prise d'interrompre les recherches et d'inviter une élève à expliquer sa démarche, à savoir l'utilisation de son envergure comme étalon pour estimer le nombre de gazelles sur la largeur de la salle. Il est alors proposé que des élèves s'alignent bras tendus pour représenter une rangée d'ongulés, en veillant à laisser un espace suffisant entre eux. Cet espace est naturellement subjectif et relève de l'appréciation. Un consensus s'établit 4 gazelles seront installées dans une rangée. La procédure est ensuite accélérée. Un élève est invité à expliquer sa méthode pour estimer le nombre de rangées : il se sert de la largeur de son corps pour arpenter la longueur de la salle avec des pas chassés. Après une discussion collective sur la validité de la démarche, une nouvelle chaîne d'élèves est formée dans la longueur. La classe décide que le nombre de rangées sera de 10. Le calcul final du nombre de gazelles est alors établi : 10 rangées × 4 gazelles par rangée, soit 40. Arrondir le résultat était inutile, puisque le nombre final est « simple » et que les espaces fictifs entre les gazelles sont pertinents.

L'hirondelle

ORGANISATION DE L'ACTIVITÉ

L'objectif de l'activité est de répondre à la question : *Combien d'hirondelles peuvent-elles être installées confortablement dans la salle de classe ?* Pour ce faire, devront être considérées la hauteur, la largeur et la longueur de l'oiseau de dimensions plus petites que celles des animaux précédents. De plus, s'agissant d'un volatile, le volume de la salle sera exploité. Le déroulé suivant est prévu : visionnage d'une vidéo, activité de recherche par groupes avec matériel et mise en commun, puis exploitation de la hauteur de la salle et décompte final du nombre d'hirondelles installées.

Pour débuter, une vidéo narrant l'adoption d'une hirondelle par un homme est projetée. Elle n'apporte aucune donnée numérique, mais a pour intérêt principal de montrer une hirondelle adulte posée sur l'épaule d'une personne, donc de rendre les trois dimensions du volatile accessibles aux comparaisons mentales. Même si les élèves ont sûrement une idée préconçue et correcte de ces dimensions, la vidéo apporte une référence commune à tous.

Fig. 10 : Installation des hirondelles (© Jean-Michel Fenerol (www.oiseaux.net))

Une photographie est ensuite projetée (Fig. 10), avec une question un peu différente des précédentes : *Combien d'hirondelles peuvent rentrer dans la classe du vaisseau spatial ? Vous installerez des rangées parallèles de fils tendus à l'horizontale et reliant un mur au mur opposé, ceci à différentes hauteurs du mur.* À noter qu'il ne sera pas demandé si un tel animal peut rentrer dans la salle, du fait de l'évidence de la réponse due à sa taille et le cas de la gazelle ayant déjà été traité. De plus, l'organisation de l'animal dans la salle sera ici imposée : les oiseaux seront tous perchés sur des fils, côte à côte, et de façon « confortable ».

La classe choisira alors si les fils seront fixés dans la largeur ou la longueur de la salle, et chaque groupe recevra un fil de dimension correspondante (obtenu en déroulant une bobine de fil d'un mur au mur opposé et en coupant à la bonne longueur).

Fig. 11 : Les élèves placent les hirondelles

Le travail commencera en 1D. Les élèves marqueront sur leurs fils les positionnements des hirondelles afin de les aider dans leur décompte (Fig. 11). Chaque groupe imaginera une procédure d'estimation qualitative de la largeur de l'espace vital d'une hirondelle comparativement aux dimensions du volatile. Il s'agira ensuite de reporter sur le fil, autant de fois que nécessaire, l'espace vital estimé. Cette opération permettra d'estimer le nombre d'oiseaux perchés sur un fil.

Le travail se poursuivra en 2D : les fils des six groupes seront posés par terre, deux à deux parallèles. L'hypothèse sera faite qu'ajouter un fil nuirait au confort des volatiles, ce qui permettra d'estimer le nombre total d'oiseaux posés au sol. La dernière étape sera en 3D. Les élèves reproduiront la même configuration sur plusieurs étages dont le nombre sera décidé collectivement. L'estimation du nombre total d'hirondelles installées s'achèvera par un dernier calcul.

DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ

Les premières étapes se déroulent comme prévu et la classe choisit d'installer les fils dans la largeur de la salle. Les groupes se mettent rapidement en action une fois les fils distribués et on remarque plusieurs types de démarches mises en œuvre. Comme pour les gazelles, certains élèves se précipitent et ne se concertent pas assez sur la marche à suivre. Dans plusieurs groupes, les élèves se partagent la tâche en partant de chaque extrémité de leur fil ; l'intention est louable à condition de s'être mis d'accord sur la procédure, ce qui n'a pas toujours été le cas.

Fig. 12 : Avec une paire de ciseau

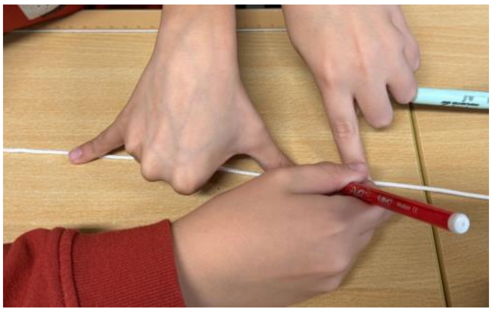


Fig. 13 : Avec l'empan

Deux procédés intéressants sont identifiés : sur la figure 12, les élèves estiment que la largeur de l'espace vital, comparativement à la largeur du volatile, correspond à un « écart de ciseau », et sur la figure 13, à un empan (unité découverte l'an passé par des élèves). Ces choix opérés, les fils sont balisés. Les autres groupes ont placé des traits sur leur fil « au jugé », en essayant d'être le plus régulier possible. Au bout d'un moment, la classe est recadrée en précisant que, même si une hirondelle est petite, il faut penser à ne pas la serrer avec une voisine – les écarts prévus par certains groupes étant vraiment très étroits. Il a donc été dit aux élèves que, si leur travail déjà bien avancé leur semblait rentrer dans cette catégorie, alors ils pourraient compter un emplacement sur deux dans leur décompte final.

Fig. 14 : Collecte des données

Un des groupes a été très méthodique pour le comptage des places prévues pour les hirondelles, une élève notant leur nombre au fur et à mesure sur une ardoise (Fig. 14). Une fois la tâche terminée, chaque groupe est venu installer son fil par terre dans la largeur (symbolisant son accroche d'un mur à l'autre) et annoncer le nombre d'oiseaux trouvé.

Les effectifs sont écrits au tableau, ils varient de 42 à 80. Une discussion critique s'engage, concluant que le groupe ayant trouvé 80 a une configuration trop dense et que les valeurs des autres groupes sont plus acceptables.

Fig. 15 : Au tableau

L'activité est toutefois poursuivie avec les effectifs obtenus, et les élèves sont invités à estimer le nombre total d'hirondelles sur les six ficelles. La plupart additionnent correctement et obtiennent 339 oiseaux (Fig. 15). Enfin, la classe décide collectivement de poser quatre étages de fils. Il suffit donc de multiplier l'effectif précédent par 4 ; les élèves trouvent, pour la plupart, 1356 hirondelles.

La séance s'achève par un questionnement collectif sur l'estimation du nombre d'hirondelles à retenir ; le consensus adopté est de 1350 oiseaux.

Conclusion

Cet article vise à mettre en lumière les réussites et difficultés rencontrées par une classe d'écoliers découvrant des problèmes de Fermi. D'abord, les élèves ont rapidement compris qu'il ne fallait pas énoncer de simples impressions, mais plutôt commencer par observer. Ils se sont en effet très vite lancés dans des comparaisons mentales, même si la précision de celles-ci était parfois défaillante et que le recours au geste se révélait nécessaire. Cette spontanéité à comparer les a conduits à élaborer assez facilement une argumentation. Ensuite, le traitement des activités s'est largement appuyé sur le corps avec lequel tous les enfants développent des expériences informelles. Ce réflexe naturel a d'ailleurs été observé puisque les élèves ont successivement utilisé l'empan, l'envergure et la largeur du bassin. Outre le corps, l'environnement de la classe offre de nombreux autres étalons (salle, mobilier et fournitures scolaires), perceptibles par la vue et le toucher. Ceci a aussi pu être observé, les élèves s'étant référés à la hauteur du plafond et à l'écart d'une paire de ciseaux. Dans le cas de la girafe, le rappel en mémoire de mesures de référence a été nécessaire. Celles-ci concernaient une nouvelle fois le corps et l'espace-classe. La mémorisation de quelques valeurs de référence semble donc suffire dès lors que les représentants de ces valeurs (par exemple, un empan est un représentant de 20 cm) ont été choisis selon leur probabilité de sollicitation. Enfin, pour garantir l'accessibilité didactique, le choix a été fait d'insérer des temps de manipulation, durant lesquels les élèves étaient libres de se déplacer et même de s'accroupir sous les tables afin d'étendre les fils d'un mur à l'autre. Cette mobilité des corps a été très appréciée. Au final, la difficulté principale a concerné le choix du degré de précision de l'estimation selon le contexte – une girafe, par exemple, ne se mesure pas au millimètre près. Plusieurs explications sont possibles : un manque de culture arithmétique lié à une pratique insuffisante ; un enthousiasme pour la manipulation et l'obtention d'un résultat quantifié, qui freinait une réflexion plus posée ; ou enfin, le contraste entre une phase d'apprentissage sollicitant le corps et le reste du temps où les tâches sont plus cognitives. En conclusion, les étayages prévus ont été suffisants et les élèves ont pu développer des compétences diverses : utiliser le corps de manière conscientisée, opérer de premières comparaisons mentales, organiser une recherche, mémoriser des valeurs de référence, recourir à des procédés d'estimation variés et argumenter. L'expérience s'est donc révélée concluante, y compris pour la professeure titulaire de la classe, désormais désireuse de renouveler de telles expériences.

BIBLIOGRAPHIE

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?. *Petit x, 31*, 37-61.

Farges, J. (2006). Monde de la vie et philosophie de la vie. *Husserl entre Eucken et Dilthey, Études Germaniques, 242* (2), 191-217. DOI 10.3917/eger.242.0191

Loretan, C., Weiss, L. & Mueller, A. (2018). Quelle est la place du raisonnement semi quantitatif (RSQ) dans l'enseignement des sciences. *Revue de Mathématiques pour l'école, 229*, 15-21.

Sirieix, P. (2023). Où en sont les élèves sur l'estimation de la mesure de longueurs ? *Grand N, 111*, 85-122.

Soriano-Gafiuk, F. (2024a). La consigne « Schätz mal! » dans les écoles allemandes lors de séances portant sur les grandeurs. *Grand N, 113,* 5-27.

Soriano-Gafiuk, F. (2024b). Estimation de quantités dans les écoles élémentaires allemandes. *IREM - Repères, 136 [numéro spécial « Nombres et opérations »]*, 31-52.

RMÉ
POUR CELLES EST CEUX
QUI S'INTÉRESSENT À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.rme.swiss, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Contact : contact@rme.swiss

Site internet : www.rme.swiss